Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 4 di esercizi - 6 novembre 2016

Esercizio 1. Siano V, W, Z spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$.

(i) Dimostrare che esistono isomorfismi canonici:
- $(V \otimes W) \otimes Z \cong V \otimes (W \otimes Z)$;
- $\mathrm{Sym}^k(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i=0}^k (\mathrm{Sym}^i V) \otimes (\mathrm{Sym}^{k-i} W)$ e similmente $\Lambda^k(V \oplus W) \cong \bigoplus_{i=0}^k (\Lambda^i V) \otimes (\Lambda^{k-i} W)$;
- $\Lambda^n V \cong (\Lambda^m U) \otimes (\Lambda^{n-m} V/U)$, dove $n = \dim(V)$ e $U \subset V$ è un sottospazio vettoriale di $\dim(U) = m$;
- $(V \otimes W)^* \cong V^* \otimes W^*$ e similmente $(\mathrm{Sym}^k V)^* \cong \mathrm{Sym}^k V^*$ e $(\Lambda^k V)^* \cong \Lambda^k V^*$.

(ii) Esibire spazi vettoriali V, W e un elemento $\alpha \in V \otimes W$ che non sia del tipo $v \otimes w$ per alcuna coppia di vettori $v \in V$ e $w \in W$.

(iii) Sia $f : V \to V$ un endomorfismo $\mathbb{C}$-lineare (o $\mathbb{R}$-lineare) e sia
$$p(t) = \det(tI - f) = t^n - a_1 t^{n-1} + a_2 t^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n$$
il suo polinomio caratteristico, dove $n = \dim(V)$. Dimostrare che $a_k = \mathrm{tr}(\Lambda^k f)$.
[Iniziare verificandolo per $V = \mathbb{C}^n$ e f triangolare, poi per $V = \mathbb{C}^n$ e f qualunque, poi per $V = \mathbb{R}^n$, e infine per V qualunque.]

Esercizio 2. Sia M una varietà differenziabile connessa di dimensione n e sia $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlante con U_i connesse. Diciamo che due carte (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) in $\mathcal{A}$ tali che $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ sono *concordi* se $\det(d\varphi_{ji}) > 0$ in ogni punto e scriveremo $\varphi_i \sim \varphi_j$.

(a) Dimostrare che ogni varietà differenziabile M ammette un tale atlante $\mathcal{A}$ con carte connesse.

(b) Considerare la relazione di equivalenza sulle carte di $\mathcal{A}$. Dimostrare che $\mathcal{A}/\sim$ è composto di due classi di equivalenza se M è orientabile, di una classe di equivalenza se M non è orientabile.

(c) Un *cammino combinatorio* è una collezione finita di carte $(U_0, \varphi_0), \dots, (U_r, \varphi_r)$ di $\mathcal{A}$ tali che $U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset$ e $\varphi_i \sim \varphi_{i+1}$ per ogni $i = 0, \dots, r-1$; il cammino è *chiuso* se $U_r \cap U_0 \neq \emptyset$; esso è *concorde* se $\varphi_r \sim \varphi_0$. Dimostrare che M è orientabile se e solo se ogni cammino combinatorio è concorde.

Esercizio 3. (a) Dimostrare che una 1-forma differenziale φ su $M = \mathbb{R}$, oppure $M = [a, b)$, $[a, b]$, è esatta.

(b) Sia $\hat{\theta} = \dfrac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ una 1-forma differenziale su $N := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e sia θ la sua restrizione a S^1 (ossia $\theta := i^* \hat{\theta}$, dove $i : S^1 \hookrightarrow N$ è l'inclusione).
Dimostrare che θ e $\hat{\theta}$ non sono 1-forme esatte.

(c) Sia $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ il toro n-dimensionale e sia $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}^n$ la proiezione naturale.
Dimostrare che una 1-forma differenziale α su $\mathbb{T}^n$ è esatta se e solo se la 1-forma $\pi^* \alpha$ su $\mathbb{R}^n$ soddisfa
$$\int_{\gamma_i} \pi^* \alpha = 0 \qquad \text{per } i = 1, \dots, n$$
dove $\gamma_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ è il cammino orientato $\gamma_i(t) = t \cdot e_i$.
