Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 5 di esercizi - 28/11/2016

Esercizio 1. Sia $\mathbb{RP}^n$ lo spazio proiettivo reale n-dimensionale e sia $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione standard. Sia inoltre $A : S^n \to S^n$ la mappa antipodale.

(i) Dimostrare che, per ogni $\psi \in \mathcal{A}^k(\mathbb{RP}^n)$, la k-forma $\tilde{\psi} := \pi^*(\psi)$ soddisfa $A^*\tilde{\psi} = \psi$. Viceversa, dimostrare che, se $\varphi \in \mathcal{A}^k(S^n)$ soddisfa $A^*\varphi = \varphi$, allora esiste $\psi \in \mathcal{A}^k(\mathbb{RP}^n)$ tale che $\tilde{\psi} = \varphi$.

(ii) Dimostrare che A preserva l'orientazione di S^n se e solo se n è dispari.

(iii) Dimostrare che $\mathbb{RP}^n$ è orientabile se e solo se n è dispari.

Esercizio 2. Sia (M, g) una varietà riemanniana orientata, $D \subset M$ un dominio compatto con bordo regolare e sia ν_p il vettore unitario normale esterno a D in $p \in \partial D$.
Il *laplaciano* $\Delta(f)$ di una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ è definito come $\Delta(f) := \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$.

(a) Dimostrare che, se $f, h : M \to \mathbb{R}$ sono due funzioni regolari, allora

$$\int_{\partial D} \left(f \frac{\partial h}{\partial \nu} \right) \Omega_{\partial D} = \int_D g\left(\operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(h)\right) \Omega_M + \int_D \left(f \Delta h\right) \Omega_M$$

dove Ω_M è la forma di volume su M indotta da g e $\Omega_{\partial D}$ è la forma di volume su ∂D indotta da $g|_{\partial D}$.

(b) Dimostrare che, se $f, h : M \to \mathbb{R}$ sono due funzioni regolari, allora

$$\int_{\partial D} \left(f \frac{\partial h}{\partial \nu} - h \frac{\partial f}{\partial \nu} \right) \Omega_{\partial D} = \int_D \left(f \Delta h - h \Delta f\right) \Omega_M$$

dove Ω_M è la forma di volume su M indotta da g e $\Omega_{\partial D}$ è la forma di volume su ∂D indotta da $g|_{\partial D}$.

(c) Dimostrare che, se M non ha bordo e $f : M \to \mathbb{R}$ ha supporto compatto, allora $\int_M (\Delta f)\, \Omega_M = 0$.

Esercizio 3. Munire gli spazi $\mathbb{R}^n$ della metrica euclidea e dell'orientazione standard e le loro sottovarietà della metrica indotta restringendo la metrica euclidea.

(i) Calcolare in due modi l'integrale della 1-forma $\varphi = (x^2 + 7y)dx + (-x + y\sin(y^2))dy \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2)$ lungo ∂D, dove $D \subset \mathbb{R}^2$ è il dominio triangolare con vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$, e verificare il teorema di Stokes in questo caso.

(ii) Sia $\alpha = (2x + y\cos(xy))dx + (x\cos(xy))dy \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^2)$. Mostrare che α è chiusa. Mostrare che α è esatta, esibendo una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che $\alpha = df$. Calcolare l'integrale di α lungo il cammino ∂D del punto (i).

(iii) Dimostrare che la seguente 2-forma

$$\sigma = \frac{x\, dy \wedge dz - y\, dx \wedge dz + z\, dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è chiusa. Calcolare $\int_{S^2} \sigma$ e determinare se σ sia esatta.

(iv) Sia $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ munito dell'orientazione indotta da quella di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo la 1-forma su M

$$\beta = \frac{x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + \cdots + x_n\, dx_n}{\|x\|^n}$$

Calcolare la $(n-1)$-forma β' ottenuta come $\beta' := \iota_{L_g^{-1}(\beta)}(\Omega_g)$, dove Ω_g è la forma di volume e $L_g : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{A}^{n-1}(M)$ indotte da g. Dimostrare che β' è chiusa. Valutare $\int_{S^{n-1}} \beta'$ e determinare se β' sia esatta.

(v) Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ il dominio ottenuto ruotando il cerchio $\{(x-2)^2 + z^2 - 1 \leq 0,\ y = 0\}$ attorno all'asse z e sia $\mathbb{T} = \partial D$ con l'orientazione indotta dalla normale esterna a D. Calcolare l'area di $\mathbb{T}$, calcolare la media della funzione $f(x, y, z) = z^2 + 1$ su $\mathbb{T}$ e calcolare l'integrale di $\omega := z\, dx \wedge dy$ su $\mathbb{T}$.
