Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 6 di esercizi - 09/12/2016

Esercizio 1. Sia $\mathbb{RP}^n$ lo spazio proiettivo reale n-dimensionale e sia $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ la proiezione standard. Sia inoltre $\tau : S^n \to S^n$ la mappa antipodale e indichiamo con $\mathcal{A}^k(S^n)^\tau$ le k-forme τ-invarianti (ossia le ω su S^n tali che $\tau^*\omega = \omega$). Analogamente per $H^k(S^n)^\tau$.

(i) Dimostrare che $\pi^* : \mathcal{A}^k(\mathbb{RP}^n) \to \mathcal{A}^k(S^n)$ induce un isomorfismo tra $\mathcal{H}^k(\mathbb{RP}^n)$ e il sottospazio $H^k(S^n)^\sigma \subset H^k(S^n)$ delle classi $[\omega]$ tali che $[\tau^*\omega] = [\omega]$.

(ii) Calcolare $H^*(\mathbb{RP}^n)$.

(iii) Sia $\pi_! : \mathcal{A}^k(S^n) \to \mathcal{A}^k(\mathbb{RP}^n)$ definita da $\pi_!(\omega)_{[p]} := (d\pi)_p\omega_p + (d\pi)_{(-p)}\omega_{(-p)}$ per ogni $[p] \in \mathbb{RP}^n$. Dimostrare che $\pi_!$ induce un omomorfismo di complessi e calcolare l'applicazione indotta in coomologia.

Esercizio 2. Sia $P = \{p_1, \ldots, p_b\}$ un sottoinsieme di b punti distinti di S^2.
Calcolare $H^*(S^2 \setminus P)$ e $H^*_c(S^2 \setminus P)$ per induzione su $b \geq 1$.

Esercizio 3. Sia $U_i = \{[Z] \in \mathbb{CP}^n \mid Z_i \neq 0\}$ e consideriamo l'identificazione $U_i \cong \mathbb{C}^n$ indotta dalla carta affine. Se $I \subset \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, denotiamo con U_I l'unione $\bigcup_{i \in I} U_i$.

(i) Dimostrare che, se $k \notin I$, allora $U_k \cap U_I$ può essere identificato con $(\mathbb{C}^{|I|} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-|I|}$.

(ii) Calcolare la coomologia di $(\mathbb{C}^{|I|} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^{n-|I|}$.

(iii) Definire $X_k := U_0 \cup \cdots \cup U_k$ per $k = 0, \ldots, n$, cosicché $X_n = \mathbb{CP}^n$.
Calcolare $H^*(X_k)$ per induzione su $k \geq 0$.

Esercizio 4. Sia M una varietà orientata e compatta di dimensione m ottenuta come somma connessa $M_1 \# M_2$ di varietà connesse M_1, M_2.

(i) Calcolare $H^*(M)$.

(ii) Calcolare $H^*(\Sigma_g)$ per induzione su $g \geq 1$, dove Σ_g è una superficie compatta connessa e orientata di genere g.

(iii) Calcolare $H^*(X_m)$ per induzione su $m \geq 1$, dove X_m è la superficie compatta orientata ottenuta come somma connessa di m copie di $\mathbb{RP}^2$.
