Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Foglio 7 di esercizi - 19/12/2016

Esercizio 1. Sia M una varietà C^∞ di dimensione m e siano $A \subset M$ un aperto e $D \subset A$ un disco chiuso m-dimensionale.

(a) Sia $k > 0$. Dimostrare che ogni classe $\alpha \in H^k(M)$ può essere rappresentata da una k-forma φ a supporto in $M \setminus D$.

(b) Dimostrare che ogni classe $\beta \in H^k_c(M)$ può essere rappresentata da una k-forma ψ a supporto compatto in $M \setminus D$.

Esercizio 2. Sia M una varietà C^∞ connessa di dimensione m e sia $\Lambda^m T^*M \to M$ il fibrato vettoriale delle m-forme differenziali su M e $z : M \to \Lambda^m T^*M$ la sezione nulla, ossia $z(p) := (p, 0)$. Chiamiamo $Z := z(M)$ e consideriamo il *rivestimento* $\widetilde{M}$ *di orientazione di* M, ossia

$$\widetilde{M} := (\Lambda^m T^*M \setminus Z) \,/\!\sim$$

dove $(p, \omega_p) \sim (p', \omega'_{p'})$ se e solo se $p = p'$ ed esiste $c > 0$ tale che $\omega_p = c \cdot \omega'_p$.

(i) Dimostrare che $\sim$ è una relazione di equivalenza e che la proiezione naturale $\pi : \widetilde{M} \to M$ è un rivestimento di ordine 2. Dimostrare quindi che $\widetilde{M}$ ha un'unica struttura di varietà C^∞ tale che π sia C^∞.

(ii) Dimostrare che $\widetilde{M}$ è connesso $\iff$ M è orientabile.

(iii) Dimostrare che $\sigma(p, [\omega_p]) := (p, [-\omega_p])$ induce una ben definita applicazione $\sigma : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$ e che $\pi \circ \sigma = \pi$.

(iv) Dimostrare che $H^*(\widetilde{M}) = H^*(\widetilde{M})^+ \oplus H^*(\widetilde{M})^-$, dove $H^*(\widetilde{M})^+$ è il sottospazio di $H^*(\widetilde{M})$ delle classi σ-invarianti (ossia degli $\alpha \in H^*(\widetilde{M})$ tali che $\sigma^*\alpha = \alpha$) e $H^*(\widetilde{M})^-$ è il sottospazio di $H^*(\widetilde{M})$ delle classi σ-anti-invarianti (ossia degli $\alpha \in H^*(\widetilde{M})$ tali che $\sigma^*\alpha = -\alpha$).
Dimostrare che analogamente $H^*_c(\widetilde{M}) = H^*_c(\widetilde{M})^+ \oplus H^*_c(\widetilde{M})^-$.

(v) Dimostrare che $\pi^* : H^*(M) \to H^*(\widetilde{M})$ induce un isomorfismo di $H^*(M)$ su $H^*(\widetilde{M})^+$. Analogamente, dimostrare che π^* induce $H^*_c(M) \cong H^*_c(\widetilde{M})^+$.

(vi) Dimostrare che, se M è una varietà connessa non orientabile (di tipo finito), allora $H^m(M) = 0$ e analogamente $H^m_c(M) = 0$.

(vii) Supponiamo M orientabile (di tipo finito). Dimostrare che la dualità di Poincaré su $\widetilde{M}$ induce isomorfismi $H^k(\widetilde{M})^- \cong \left(H^{m-k}_c(\widetilde{M})^-\right)^*$ e $H^k(\widetilde{M})^+ \cong \left(H^{m-k}_c(\widetilde{M})^+\right)^*$.

(viii) Supponiamo M non orientabile (di tipo finito). Dimostrare che la dualità di Poincaré su $\widetilde{M}$ induce isomorfismi $H^k(\widetilde{M})^- \cong \left(H^{m-k}_c(\widetilde{M})^+\right)^*$ e $H^k(\widetilde{M})^+ \cong \left(H^{m-k}_c(\widetilde{M})^-\right)^*$.

Esercizio 3. Calcolare $H^*(S^m \times S^n)$ e $H^*(\mathbb{T}^r)$ come $\mathbb{R}$-algebre, dove $\mathbb{T}^r = (S^1)^r$ è il toro r-dimensionale.

Esercizio 4. Sia Σ_g la superficie orientata, ottenuta somma connessa di g copie del toro $\mathbb{T} = S^1 \times S^1$, e sia X_k la superficie ottenuta come somma connessa di k copie di $\mathbb{RP}^2$.

(a) Calcolare $H^*(\Sigma_g)$ come $\mathbb{R}$-algebra e calcolare $\chi(\Sigma_g)$.
(b) Calcolare $H^*(X_k)$ come $\mathbb{R}$-algebra e calcolare $\chi(X_k)$.
(c) Sia $\widetilde{X}_k \to X_k$ il rivestimento di orientazione di X_k. Per quale g si ha $\widetilde{X}_k \cong \Sigma_g$?
(d) La bottiglia di Klein $K = Q/\sim$ è ottenuta da $Q = [0,1] \times [0,1]$ identificando $(x,0) \sim (x,1)$ e $(0,y) \sim (0,1-y)$. Dire se K sia orientabile e a quale delle superfici Σ_g, X_k sopra elencate sia diffeomorfa.

Esercizio 5. Calcolare i possibili gradi di una applicazione $f : M \to N$, dove

(a) $M = \mathbb{RP}^3$ e $N = \Sigma \times S^1$, dove dove Σ è una superficie compatta connessa e orientata;
(b) $M = S^2$ e $N = \Sigma_g$ superficie compatta connessa orientata di genere $g \geq 1$;
(c) $M = N = S^2$
(d) $M = \Sigma_g$ e $N = S^2$
(e) $M = N = \Sigma_1$
(f) $M = \Sigma_g$ e $N = \Sigma_h$ con $g < h$.
