

# Istituzioni di geometria superiore

ESERCIZI - 14/01/2017

---

**Esercizio 1.** Siano dati interi  $1 \leq k < n$  e sia  $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$  l'insieme delle  $k$ -uple ordinate di vettori linearmente indipendenti di  $\mathbb{R}^n$ .

- (a) Dare a  $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$  una struttura di varietà  $C^\infty$  e calcolarne la dimensione.
- (b) Dire se  $\mathcal{V}_k(\mathbb{R}^n)$  sia compatto e se sia connesso.

---

**Esercizio 2.** Sia  $X_t := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + tx^3 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ .

- (a) Determinare l'insieme  $B = \{t \in \mathbb{R} \mid X_t \text{ è una sottovarietà liscia di } \mathbb{R}^3\}$ .
- (b) Dire se le varietà  $X_t$  sono tutte diffeomorfe tra loro al variare di  $t \in B$ .

---

**Esercizio 3.** Considerare i campi vettoriali

$$V = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xy \frac{\partial}{\partial y}, \quad W = x^2 \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

in  $\mathbb{R}^2$  e siano  $\Phi_V$  e  $\Phi_W$  i flussi da loro indotti.

- (a) Determinare il flusso  $\Phi_V$  e trovare equazioni cartesiane per le curve integrali di  $V$ .
  - (b) Dire se il flusso  $\Phi_W$  ha orbite periodiche non costanti.
  - (c) Dire se i flussi  $\Phi_V$  e  $\Phi_W$  commutano.
-