Anno accademico 2016/2017

Istituzioni di geometria superiore

Esercizi della prova in itinere

Esercizio 1. Al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ sia M_a il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito come

$$M_a := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y^2 = x(x-2a) \right\} \cap S^2.$$

(i) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$, il sottoinsieme M_a è una sottovarietà C^∞ di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Dire per quali $a \in \mathbb{R}$ lo spazio topologico M_a è compatto e per quali è connesso.
(iii) Dire se M_0 sia una varietà topologica.

Esercizio 2. Siano dati campi vettoriali X_i seguenti

$$X_1 = y\frac{\partial}{\partial z} - 2xy^2\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}, \quad X_4 = x\frac{\partial}{\partial y} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

di $\mathbb{R}^3$ e sia Φ_i il flusso associato a X_i.

(a) Dare la definizione di flusso Φ_X associato ad un campo vettoriale liscio X su una varietà C^∞ compatta M.
(b) Per ogni $i \neq j$, calcolare $[X_i, X_j]$ e stabilire quando i flussi Φ_i e Φ_j commutino.
(c) Determinare esplicitamente i flussi Φ_2 e Φ_4.
(d) Determinare i punti fissi di Φ_1 (ossia le orbite costanti) e dire se tale flusso abbia orbite periodiche non costanti.

Esercizio 3. Considerare le embeddings $F_1, F_2, F_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definite come

$$F_1(u,v) = (u, e^v, 0), \quad F_2(u,v) = (u, v, u^2+v^2), \quad F_3(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$$

e sia $\hat{g}$ la metrica euclidea standard su $\mathbb{R}^3$.

(i) Calcolare $g_i := F_i^*(\hat{g})$ e dire se la metrica d_i su $\mathbb{R}^2$ indotta da g_i sia completa.
[Nel caso di g_3, può essere utile usare coordinate polari su $\mathbb{R}^2$ e sferiche su $\mathbb{R}^3$.]
(ii) Calcolare l'area di $B_R = \left\{ (x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 < R^2 \right\} \subset \mathbb{R}^2$ rispetto a g_2 per ogni $R > 0$.
(iii) Sia N una sottovarietà connessa della varietà riemanniana (M,g) e sia $g|_N$ la metrica riemanniana indotta da g su N. Dimostrare che, per ogni $p, q \in N$, si ha

$$d_N(p,q) \geq d_M(p,q)$$

dove d_M è la distanza indotta da g su M e d_N è la distanza indotta da $g|_N$ su N.
