Topologia algebrica

Anno accademico 2018/19

Prova scritta in itinere (6 novembre 2018)

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	12	
2	12	
3	12	
Totale	36	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*
In ogni esercizio, scelto l'ordine nel quale affrontare le domande, nella risoluzione di un punto si possono assumere i punti precedenti. (Per esempio, se si affrontano le domande dell'esercizio 1 nell'ordine dato, è possibile risolvere 1(d') usando 1(d), pur senza aver dimostrato 1(d).)

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia K un complesso simpliciale finito e connesso e sia $f : \widetilde{X} \to X := |K|$ un rivestimento di grado d.

(a) Dimostrare che esiste un complesso simpliciale $\widetilde{K}$, un morfismo simpliciale $\varphi : \widetilde{K} \to K$ e un omeomorfismo $\widetilde{X} \cong |\widetilde{K}|$ tali che f si identifichi con $|\varphi|$. Calcolare $\chi(\widetilde{X})$.

(b) Dire quali spazi topologici Y ammettono un rivestimento $\widetilde{Y}$ omeomorfo a $\mathbb{CP}^2$.

(c) Sia A un gruppo abeliano. Dimostrare che l'applicazione che manda un simplesso di K nella somma delle sue preimmagini in $\widetilde{K}$ definisce un morfismo $C_*^{ord}(K;A) \to C_*^{ord}(\widetilde{K};A)$ di complessi di catene, che quindi discende ad una applicazione $\varphi^! : H_*^{ord}(K;A) \to H_*^{ord}(\widetilde{K};A)$. Calcolare la composizione $\varphi_*\varphi^! : H_*^{ord}(K;A) \to H_*^{ord}(K;A)$.

(d) Supponiamo che $f_*(\pi_1(\widetilde{X})) \subset \pi_1(X)$ sia un sottogruppo normale con quoziente finito $G \cong \mathrm{Aut}(f)$, cosicché $X = \widetilde{X}/G$. Dimostrare che G agisce su $\widetilde{K}$ in modo simpliciale e quindi G agisce su $H_*^{ord}(\widetilde{K};\mathbb{Q})$. Dimostrare che $\varphi^!$ realizza un isomorfismo di spazi vettoriali tra $H_*^{ord}(K;\mathbb{Q})$ e $H_*^{ord}(\widetilde{K};\mathbb{Q})^G$.

(d') Sia $p \geq 2$ un primo e $\zeta = \exp(2\pi i/p)$ una radice p-esima dell'unità e sia $1 \leq k \leq p-1$ un intero. Considerare $M := S^3/\sim$ ottenuta da $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ tramite l'identificazione $(z_1, z_2) \sim (\zeta z_1, \zeta^k z_2)$. Calcolare le dimensioni di $H_q(M;\mathbb{Q})$ per ogni $q \geq 0$.

Risoluzione:

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^2$ siano D_0 il disco chiuso di centro O e raggio 4, $\mathring{D}_+$ (risp. $\mathring{D}_-$) il disco aperto di centro $(2,0)$ e raggio 1 (risp. di centro $(-2,0)$ e raggio 1). Sia $P := D_0 \setminus (\mathring{D}_+ \cup \mathring{D}_-)$.

(a) Calcolare $H_2(P, P \setminus \{x\})$ quando x è un punto interno a P e quando x è un punto del bordo di P. Dimostrare che un omeomorfismo $f : P \to P$ si restringe a un omeomorfismo $\partial P \to \partial P$.

(b) Dimostrare che un omeomorfismo $f : P \to P$ *senza punti fissi* necessariamente rovescia l'orientazione di P e permuta ciclicamente le tre componenti di bordo di P.

(c) Dire se un omeomorfismo $f : P \to P$ senza punti fissi esista.

Risoluzione:

Esercizio 3. Siano X e Y spazi topologici compatti triangolabili (ossia $X \cong |K|$ e $Y \cong |L|$ con K, L complessi simpliciali finiti).

(a) Calcolare $\chi(X \times Y)$ in funzione di $\chi(X)$ e $\chi(Y)$.
(Suggerimento: procedere per induzione sulla dimensione e sul numero di simplessi di K.)

(b) Calcolare la caratteristica di Eulero dei seguenti spazi

$$M_1 = \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2, \qquad M_2 = \mathbb{RP}^2 \times S^2, \qquad M_3 = \mathbb{RP}^4, \qquad M_4 = D^3 \times S^1.$$

(c) Dire per quali $i \neq j$ lo spazio M_i è omotopicamente equivalente allo spazio M_j.

(d) Dire se $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ oppure $\mathrm{U}(2)$ siano omotopicamente equivalenti a qualcuno degli M_i.

Risoluzione: