Topologia algebrica

Anno accademico 2018/19

Prova scritta (25 gennaio 2019)

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Numero di matricola: ______________________

☐ *Esame completo* ☐ *Secondo esonero (solo esercizi 3-4)*

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	10	
2	10	
3	10/16	
4	10/16	
Totale	40/32	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*
In ogni esercizio, scelto l'ordine nel quale affrontare le domande, nella risoluzione di un punto si possono assumere i punti precedenti. (Per esempio, se si affrontano le domande dell'esercizio 1 nell'ordine dato, è possibile risolvere 1(c) usando 1(b), pur senza aver dimostrato 1(b).)

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: ☐

Esercizio 1. Sia $X = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{T}^2$ lo spazio ottenuto come somma connessa di un piano proiettivo reale e di un toro reale bidimensionale (ossia $X := (\mathbb{RP}^2 \setminus \mathring{D}) \coprod (\mathbb{T}^2 \setminus \mathring{D}')/\sim$, dove $D \subset \mathbb{RP}^2$ e $D' \subset \mathbb{T}^2$ sono dischi chiusi e $\sim$ identifica $\partial D \ni x \sim f(x) \in \partial D'$ per un qualche omeomorfismo $f : D \to D'$).

(a) Dare una presentazione per generatori e relazioni di $\pi_1(X)$.

(b) Sia $p \geq 2$ un primo e sia Y un complesso di celle connesso. Dimostrare che c'è una corrispondenza tra rivestimenti connessi e regolari di Y di grado p a meno di isomorfismo e $\left(H^1(Y; \mathbb{Z}/p) \setminus \{0\}\right) / \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/p)$.

(c) Classificare i rivestimenti connessi e regolari $\widetilde{X} \to X$ di grado 3 a meno di isomorfismo.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia M una varietà compatta, connessa, orientabile, di dimensione m e sia $f : S^m \to M$ una mappa di grado non nullo.

(a) Dimostrare che $f_* : H_*(S^m; \mathbb{Q}) \to H_*(M; \mathbb{Q})$ è un isomorfismo.

(b) Dimostrare che, se $|\deg(f)| = 1$, allora $f_* : H_*(S^m; \mathbb{Z}) \to H_*(M; \mathbb{Z})$ è un isomorfismo.
(Suggerimento: studiare l'omologia a coefficienti in $\mathbb{Z}/p$ con p primo.)

Risoluzione:

Esercizio 3. Sia $f : M \to N$ una mappa tra varietà connesse e sia $x \in M$. Supponiamo N compatta e orientabile.

(a) Dimostrare che, se f è un rivestimento, allora M è orientabile.

(b) Dimostrare che, se f è un rivestimento con d fogli e M, N sono orientate, allora $|\deg(f)| = d$.

(c) Supponiamo che f sia una mappa di grado 1 tra varietà orientate. Dimostrare che $f_* : \pi_1(M, x) \to \pi_1(N, f(x))$ è suriettiva, e che $f_* : H_1(M; \mathbb{Z}) \to H_1(N; \mathbb{Z})$ è suriettiva.
(Suggerimento: considerare un sollevamento $\tilde{f} : M \to \widetilde{N}_G$ di f al rivestimento $p : \widetilde{N}_G \to N$ corrispondente al sottogruppo $G := f_*\pi_1(M, x) \subseteq \pi_1(N, f(x))$, e dimostrare che p deve avere finiti fogli.)

(d) Sia $\Sigma_g \to \Sigma_h$ una applicazione di grado 1 tra superfici compatte orientabili di genere rispettivamente g e h. Dimostrare che $g \geq h$.

Risoluzione:

Esercizio 4. Sia N una varietà liscia compatta, connessa, orientabile, di dimensione n e sia $S \subset N$ una sottovarietà liscia, chiusa, connessa e orientata di dimensione $n-1$. Denotiamo con $i : S \hookrightarrow N$ l'inclusione e $[S] \in H_{n-1}(S;\mathbb{Z})$ la classe fondamentale di S.

(a) Dimostrare che $0 = i_*[S] \in H_{n-1}(N;\mathbb{Z})$ se e solo se $N \setminus S$ è sconnessa.

(b) Dimostrare che, se $i_*[S] = 0$ in $H_{n-1}(S;\mathbb{Z})$ e $\gamma \subset N$ è una curva liscia, chiusa, trasversa a S, allora $\#(S \cap \gamma)$ è pari.

(c) Dimostrare che, se $i_*[S] \neq 0$ in $H_{n-1}(S;\mathbb{Z})$, allora $i_*[S]$ è indivisibile (ossia $i_*[S]$ non può essere scritto come $k\alpha$ con $k \geq 2$ intero e $\alpha \in H_{n-1}(N;\mathbb{Z})$).

Risoluzione: