Topologia algebrica

Anno accademico 2018/19

Prova scritta (11 febbraio 2019)

Cognome: ____________________________

Nome: _______________________________

Numero di matricola: _____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	12	
4	10	
Totale	38	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.
In ogni esercizio, scelto l'ordine nel quale affrontare le domande, nella risoluzione di un punto si possono assumere i punti precedenti. (Per esempio, se si affrontano le domande dell'esercizio 3, è possibile risolvere 3(c) usando 3(b), pur senza aver dimostrato 3(b).)

Verrà corretto **solo quello che sarà scritto su queste pagine.**

Voto/30: | |

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico connesso e triangolabile (ossia $X \cong |K|$ per un qualche complesso simpliciale K) e sia dato un rivestimento $p : \tilde{X} \to X$ con $\tilde{X}$ compatto.

(a) Dimostrare che, se $\tilde{X}$ è contraibile, allora X è contraibile.

(b) Dimostrare che, se p non è un omeomorfismo, allora $H^k(\tilde{X}; \mathbb{Q}) \neq 0$ per qualche $k > 0$.

Risoluzione:

Esercizio 2. Sia S una superficie compatta, connessa e orientata, di genere g. Sia

$$b : H^1(S;\mathbb{R}) \otimes H^1(S;\mathbb{R}) \xrightarrow{\cup} H^2(S;\mathbb{R}) \xrightarrow{\cdot\cap[S]} \mathbb{R}$$

la forma bilineare indotta dal cup product e dall'orientazione di S.

(a) Dimostrare che il più grande sottospazio di $H^1(S;\mathbb{R})$ isotropo per b (ossia tale che $b(v,w) = 0$ per ogni v, w in tale sottospazio) ha dimensione g.

(b) Sia $\Gamma \subset S$ un sottospazio omeomorfo ad un complesso di celle finito di dimensione 1. Dimostrare che, se esiste $r : S \to \Gamma$ retrazione, allora $\chi(\Gamma) \geq 1 - g$.

Risoluzione:

Esercizio 3. Identificare $\mathbb{RP}^3$ con l'iperpiano proiettivo $\Pi = \{X_4 = 0\}$ dentro $\mathbb{RP}^4$.

(a) Dimostrare che, se una $f : \Pi \to S^3$ continua si estende a una $\hat{f} : \mathbb{RP}^4 \to S^3$ continua, allora f ha grado 0.

(b) Dire se esistano applicazioni continue $g : \mathbb{RP}^3 \to S^3$ di grado non nullo.

(c) Dire se esista una applicazione continua $h : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$ di grado 2.

(d) Dire se esista una applicazione continua $h : \mathbb{RP}^3 \to \mathbb{RP}^3$ di grado 3.

Risoluzione:

Esercizio 4. Considerare l'applicazione $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$ definita come $f(x, y, z) = (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$.

(a) Dimostrare che f induce una embedding $\bar{f} : \mathbb{RP}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

(b) Sia $P = \bar{f}(\mathbb{RP}^2) \subset \mathbb{R}^4$. Calcolare $H_*(\mathbb{R}^4 \setminus P; \mathbb{Z})$.

(c) Dimostrare che, se $U \subset \mathbb{R}^3$ è un aperto, allora $H_1(U; \mathbb{Z})$ è privo di torsione.

Risoluzione: