Esercizi di topologia algebrica (8 ottobre 2018)

Esercizio 1. Sia X uno spazio topologico munito di una triangolazione $|K| \cong X$.

(a) Se $L \subseteq K$ è un sottocomplesso simpliciale, dimostrare che $\bigcup_{v \in L_0} \mathrm{st}(v) = |K| \setminus |^c L|$.

(b) Dimostrare che X è localmente contraibile (ossia, ogni $x \in X$ ammette un intorno $U_x \subseteq X$ contraibile).

Esercizio 2. Sia K un complesso simpliciale non vuoto e sia $\mathrm{sd}(K)$ la sua suddivisione baricentrica. Dimostrare che K ha dimensione finita se e solo se $\mathrm{sd}(K)$ ha dimensione finita e che, in tal caso, $\dim(K) = \dim(\mathrm{sd}(K))$.

Def. Sia K un complesso simpliciale. Dati v, v' vertici di K, un *cammino simpliciale* da v a v' è una collezione ordinata $v_\bullet = (v = v_0, v_1, \ldots, v_k = v')$ di vertici di K tali che $\{v_{i-1}, v_i\} \in K_1$ per ogni $i > 0$. Il cammino $v_\bullet$ si dice *iniettivo* (o *semplice*) se i v_j sono tutti distinti.
Def. Un complesso simpliciale K si dice *connesso* se per ogni coppia v, v' di vertici di K esiste un cammino simpliciale in K da v a v'.
Def. Un *albero simpliciale* è un complesso simpliciale T non vuoto di dimensione ≤ 1 tale che, per ogni coppia di vertici v, v' in T, esista e sia unico un cammino iniettivo da v a v'.

Esercizio 3. Sia K un complesso simpliciale non vuoto. Senza usare le realizzazioni geometriche, dimostrare che $\mathrm{sd}(K)$ è connesso se e solo se K è connesso.

Esercizio 4. Sia K un complesso simpliciale non vuoto e connesso.

(a) Considerare l'insieme $\mathcal{T}$ dei sottocomplessi simpliciali di K che siano alberi. Se $T, T' \in \mathcal{T}$, allora diciamo che $T \preceq T'$ se $T \subseteq T'$ (come sottoinsieme di K). Dimostrare che esiste un elemento massimale T^{max} in $\mathcal{T}$ detto *sottoalbero massimale*. Sia b un vertice di T^{max}.

(b) Dimostrare che l'omomorfismo $\pi_1(|K^1|, \delta_b) \to \pi_1(|K|, \delta_b)$ indotta dall'inclusione $|K^1| \hookrightarrow |K|$ è suriettivo.

(c) Dimostrare che $\pi_1(|K^1|, \delta_b)$ è isomorfo al gruppo libero sull'insieme $K_1 \setminus T_1^{max}$.

(d) Usare il teorema di approssimazione simpliciale per dimostrare che ogni applicazione continua $f : (D^2, S^1) \to (|K|, |K^1|)$ è omotopa ad una applicazione $g : (D^2, S^1) \to (|K|, |K^1|)$ tale che $g(D^2) \subseteq |K^2|$.

(e) Dimostrare che l'omomorfismo $\pi_1(|K^2|, \delta_b) \to \pi_1(|K|, \delta_b)$ indotta dall'inclusione $|K^2| \hookrightarrow |K|$ è un isomorfismo.

(f) Dimostrare che $\pi_1(|K|, \delta_b)$ ammette una presentazione con generatori in corrispondenza degli elementi di $K_1 \setminus T_1^{max}$. Descrivere le relazioni prodotte dagli elementi di K_2.

Esercizio 5. Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un ricoprimento aperto *localmente finito* di X e $K(\mathcal{U})$ il complesso simpliciale nerbo di $\mathcal{U}$. Una applicazione continua $f : X \to |K(\mathcal{U})|$ si dice *canonica* se $\overline{f^{-1}(\mathrm{st}(U_i))} \subseteq U_i$ per ogni $U_i \in \mathcal{U}$ (dove U_i è al tempo stesso un aperto di X e un vertice di $K(\mathcal{U})$).

(a) Dimostrare che c'è una corrispondenza biunivoca tra mappe canoniche $X \to |K(\mathcal{U})|$ e partizioni dell'unità $\{\eta_i\}$ su X subordinate al ricoprimento $\mathcal{U}$.

(b) Dimostrare che due mappe canoniche $f, g : X \to |K(\mathcal{U})|$ sono omotope.