Esercizi di topologia algebrica (21 ottobre 2018)

Def. Un sottospazio $A \subseteq X$ di uno spazio topologico è un *retratto di deformazione forte di un suo intorno* se esiste $U \subset X$ intorno di A e $F : U \times [0,1] \to U$ continua tale che $F(u,1) = u$ e $F(u,0) \in A$ per ogni $u \in U$ e inoltre $F(a,t) = a$ per ogni $t \in [0,1]$ e $a \in A$

Esercizio 1. Sia (X, A) una coppia di spazi topologici, con $A \subseteq X$ chiuso.

(a) Supponiamo che X sia compatto e Y Hausdorff e sia $A \subseteq X$ un retratto di deformazione forte di un suo intorno chiuso (tramite una retrazione $\rho_t : N \to N$). Sia $f : (X, A) \to (Y, B)$ una applicazione continua che induca un omeomorfismo $X \setminus A \cong Y \setminus B$, dove $B \subseteq Y$ è un chiuso. Dimostrare che $M := f(N)$ si retrae per deformazione forte su B. Concludere che $H_*(f) : H_*(X, A; G) \to H_*(Y, B; G)$ è un isomorfismo.

(b) Dimostrare che, se $A \subseteq X$ è un retratto di deformazione forte di un suo intorno, allora la mappa $p : (X, A) \to (X/A, *)$ induce un isomorfismo in omologia, dove X/A si ottiene da X identificando A ad un punto che chiamiamo $* \in X/A$.

(c) Siano $(X_i, x_i)_{i\in I}$ spazi topologici puntati e supponiamo che $x_i \in X_i$ sia un punto chiuso e un retratto di deformazione forte di un suo intorno. Considerare il loro bouquet $X := \bigvee_{i\in I} X_i$, ottenuto da $\coprod_{i\in I} X_i$ identificando tutti i punti x_i tra di loro in un punto $x \in X$. Calcolare $H_*(X, x; G)$ in termini degli $H_*(X_i, x_i; G)$.

(d) Se K è un complesso simpliciale, dimostrare che $H_*(|K^{(q)}|, |K^{(q-1)}|; G)$ è isomorfa alla somma diretta di copie di G, una per ogni q-simplesso.

Esercizio 2. Considerare $\mathbb{K}^{k-1} \subset \mathbb{K}^k$ come l'iperpiano definito da $x_k = 0$ per $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Assumere che $\mathbb{RP}^n$ e $\mathbb{CP}^n$ siano triangolabili. Assumere $G = \mathbb{Z}; \mathbb{Z}/p; \mathbb{Q}$.

(a) Calcolare $H_*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{CP}^{n-1}; G)$ e $H_*(\mathbb{CP}^n; G)$.

(b) Calcolare induttivamente $H_*(\mathbb{RP}^n; G)$, l'applicazione $H_n(\pi) : H_n(S^n; G) \to H_n(\mathbb{RP}^n; G)$ indotta dalla proiezione naturale $\pi : S^n \to \mathbb{RP}^n$ e $H_*(\mathbb{RP}^n, \mathbb{RP}^{n-1}; G)$.

Def. Un atlante topologico è **orientato** se tutti i cambi di carta preservano l'orientazione (vedere punto (c) dell'esercizio seguente). Una varietà si dice **orientabile** se può essere munita di un atlante orientato.

Def. Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, localmente compatto. La sua *compattificazione di Alexandrov* è l'insieme $\hat{X} := X \cup \{\infty\}$ munito della topologia più fine che rende continua l'inclusione $X \hookrightarrow \hat{X}$ e tale che l'insieme $\hat{X} \setminus K$ sia aperto per ogni $K \subset X$ compatto.

Esercizio 3. (a) Dimostrare che l'applicazione $\mathrm{Homeo}(\mathbb{R}^n) \to \{\pm 1\}$ che associa ad un omeomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la traccia di $H_n(\hat{f}) : H_n(\hat{\mathbb{R}}^n) \to H_n(\hat{\mathbb{R}}^n)$ è un omomorfismo di gruppi suriettivo.

(b) Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso. Dimostrare che $H_n(U, U \setminus \{x\}) \cong \widetilde{H}_{n-1}(S^{n-1})$ per ogni $x \in U$ in modo canonico.

(c) Sia $f : U \to V$ un omeomorfismo tra aperti connessi di $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in U$, sia $(\tau_U^V)_x \in \{\pm 1\}$ la traccia di $H_n(U, U \setminus \{x\}) \to H_n(V, V \setminus \{f(x)\})$. Dimostrare che l'applicazione $U \ni x \to (\tau_U^V)_x \in \{\pm 1\}$ è costante: chiamiamo tale valore il *segno* del cambio di carta da U a V. (Se $\tau_U^V \equiv 1$, diciamo che f preserva l'orientazione. Se $\tau_U^V \equiv -1$, diciamo che f rovescia l'orientazione.)

(d) Sia X una varietà connessa e sia $x \in X$. Per ogni $\gamma : [0,1] \to X$ cammino con $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ siano $U_0, U_1, \ldots, U_k$ aperti connessi dell'atlante di X tali che $x \in U_0 \cap U_k$, $U_{i-1} \cap U_i \neq \emptyset$ il cambio di carta da U_{i-1} a U_i abbia segno positivo per ogni $i = 1, \ldots, k$ (si può dimostrare che tale collezione di aperti esiste sempre). Porre quindi $\tau(\gamma) := (\tau_{U_k}^{U_0})_x$.
Dimostrare che tale costruzione definisce un omomorfismo di gruppi $\tau : \pi_1(X, x) \to \{\pm 1\}$ che manda $[\gamma]$ in $\tau(\gamma)$. Dimostrare che X è orientabile se e solo se τ è banale.

(e) Sia $f : D^n \to \mathbb{R}^n$ liscia che realizzi un diffeomorfismo del disco aperto D^n sulla sua immagine. Dimostrare che f è isotopa ad una g lineare (e quindi a g identità di $\mathbb{R}^n$ oppure riflessione lineare ρ rispetto ad un iperpiano di $\mathbb{R}^n$), ossia esiste $F : D^n \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ differenziabile tale che $F(x,0) = g(x)$, $F(x,1) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed inoltre $F(\cdot,t)$ è un diffeomorfismo sulla sua immagine per ogni $t \in [0,1]$.
(Suggerimento: componendo con una omotetia $D^n \to D^n$ di fattore sufficientemente piccolo, dimostrare prima di tutto che f è isotopa ad una applicazione lineare; dimostrare poi che una applicazione lineare è isotopa a Id *oppure a ρ.)*

(f) Dimostrare che, se X è una varietà differenziabile connessa e orientabile, esistono esattamente due classi di isotopia di mappe $f : D^n \to X$ che realizzino diffeomorfismi del disco aperto D^n sulla sua immagine. Dimostrare che, se X è una varietà differenziabile connessa e orientabile, esiste esattamente una classe di isotopia di mappe $f : D^n \to X$ che realizzino diffeomorfismi del disco aperto D^n sulla sua immagine.

Esercizio 4. Sia $G = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oppure $G = \mathbb{Z}/p$ con p primo.

(a) Siano $D_1, \ldots, D_n \subset S^2$ dischi aperti disgiunti e sia $S_{0,n} := S^2 \setminus (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$. Calcolare $H_*(S_{0,n}; G)$. Similmente, calcolare $H_*(S_{1,1}; G)$ e $H_*(\Sigma_{1,1}; G)$, dove $S_{1,1}$ è ottenuta dal toro $S^1 \times S^1$ rimuovendo un disco aperto e $\Sigma_{1,1}$ è ottenuta da $\mathbb{RP}^2$ rimuovendo un disco aperto.

(b) Sia $M = [0,1] \times [-1,1]/\sim$ il nastro di Moebius, dove $(0,y) \sim (1,-y)$. Calcolare $H_*(M; G)$.

(c) La bottiglia di Klein è definita come $K = [0,1] \times [-1,1]/\sim$ con $(0,y) \sim (1,-y)$ e $(x,-1) \cong (x,1)$. Calcolare $H_*(K; G)$.

(d) Sia $S_{g,n}$ la superficie orientabile ottenuta da $S_{0,g+n}$ e da g copie di $S_{1,1}$ incollando la k-esima componente di bordo di $S_{0,g+n}$ con l'unica componente di bordo della k-esima copia di $S_{1,1}$ per ogni $k = 1, \ldots, g$. Calcolare $H_*(S_{g,n}; G)$.

(e) Per ogni $h > 0$, sia Σ_h la superficie non orientabile ottenuta da $S_{0,h+n}$ e da h copie di $\Sigma_{1,1}$ incollando la k-esima componente di bordo di $S_{0,h+n}$ con l'unica componente di bordo della k-esima copia di $\Sigma_{1,1}$ per ogni $k = 1, \ldots, h$. Calcolare $H_*(\Sigma_{h,n}; G)$.

(f) Fissiamo $b \in S_{0,n}$ e per ogni $i = 1, \ldots, n$ sia $\gamma_i : [0,1] \to S_{0,n}$ un laccio con $\gamma(0) = \gamma(1) = b$ che si avvolge in modo semplice attorno all'i-esimo disco D_i. Dimostrare che tali γ_i possono essere scelti in modo tale che $\pi_1(S_{0,n}, b)$ sia generato da $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ con l'unica relazione $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n = 1$.

(g) Sia $b \in S_{g,n}$. Dimostrare che esistono elementi $\alpha_i, \beta_i, \gamma_j \in \pi_1(S_{g,n}, b)$ per $i = 1, \ldots, g$ e $j = 1, \ldots, n$ tali che $\{\alpha_1, \beta_1, \ldots, \alpha_g, \beta_g, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ generano $\pi_1(S_{g,n}, b)$ con l'unica relazione $\left(\prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i]\right) \gamma_1 \cdots \gamma_n = 1$, dove $[\alpha_i, \beta_i] = \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1}$.

(h) Dimostrare che l'applicazione naturale $\pi_1(S_{g,n}, b) \to H_1(S_{g,n}; \mathbb{Z})$ induce un isomorfismo $\pi_1(S_{g,n}, b)^{ab} \to H_1(S_{g,n}; \mathbb{Z})$, dove $\pi_1(S_{g,n}, b)^{ab}$ è l'abelianizzazione di $\pi_1(S_{g,n}, b)$.

Def. Sia K un complesso simpliciale. Il **link** di un vertice v di K è il sottocomplesso $\mathrm{Lk}(v) := \{s \in K \mid s \cup \{v\} \in K,\ v \notin s\}$ di K. Similmente, il link di un simplesso $\sigma \in K$ è il sottocomplesso $\mathrm{Lk}(\sigma) := \{s \in K \mid s \cup \{\sigma\} \in K,\ s \cap \sigma = \emptyset\}$.

Richiami. Uno spazio topologico X è *paracompatto* se è di Hausdorff e ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ ammette un raffinamento localmente finito (ossia: per ogni $i \in I$ esiste $V_i \subset U_i$ aperto tale che $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ sia ancora un ricoprimento aperto di X e, inoltre, per ogni $x \in X$ esiste un intorno $N_x \subset X$ di x che interseca soltanto un numero finito di aperti V_i).
Una *varietà topologica di dimensione* n è uno spazio topologico M di Hausdorff paracompatto, localmente omeomorfo ad aperti di $\mathbb{R}^n$. Tale M ha una base numerabile se e solo se M ha una quantità al più numerabile di componenti connesse.

Teorema (Stone). Uno spazio metrico X è paracompatto.

Esercizio 5. Sia K un complesso simpliciale.

(a) Se L, M sono complessi simpliciali finiti, dimostrare che $|L * M| \cong |L| * |M|$, dove il join $X * Y$ di due spazi topologici è definito come $X * Y := X \times Y \times [0,1]/ \sim$ e $(x, y, 0) \cong (x, y', 0)$ e $(x, y, 1) \cong (x', y, 1)$ per ogni $x, x' \in X$ e $y, y' \in Y$.

(a') Dimostrare che, se $s \in K$, la stella $\mathrm{st}(s)$ è omeomorfa al sottoinsieme di $\langle s \rangle * |\mathrm{Lk}(s)|$ definito da $t < 1$ (seguendo le notazioni in (a)). Dimostrare inoltre che tale $\mathrm{st}(s)$ è una varietà topologica se e solo se $|\mathrm{Lk}(s)|$ è omeomorfa ad una sfera.

(a") Sia L un complesso simpliciale localmente finito. Dimostrare che $|L|$ è omeomorfo ad una varietà topologica di dimensione n se e solo se: L ha dimensione n e ogni simplesso di L è contenuto in un n simplesso; ed inoltre, per ogni $q \geq 0$ e ogni $\sigma \in L_q$ la realizzazione $|\mathrm{Lk}(\sigma)|$ è omeomorfa a S^{n-q-1}.
(Suggerimento: alla luce del "richiamo" in alto e del teorema di Stone, la proprietà di Hausdorff e la paracompattezza sono automatici.)

(a"') Sia L un complesso simpliciale localmente finito. Dimostrare che $|L|$ è omeomorfo ad una superficie con bordo se e solo se: L ha dimensione 2; ogni 0-simplesso v appartiene a qualche 2-simplesso; inoltre, $|\mathrm{Lk}(v)|$ è omeomorfo a S^1 oppure a $[0, 1]$; ogni 1-simplesso appartiene ad uno oppure a due 2-simplessi di L.
(In tal caso, diciamo che L è un superficie simpliciale e denotiamo con ∂L il sottocomplesso generato dagli 1-simplessi che appartengono ad un unico 2-simplesso.)

(b) Sia L una superficie simpliciale e supponiamo $|L| \setminus |\partial L|$ orientata. Dimostrare che esiste una 2-catena simpliciale $[L]$ ottenuta sommando una volta sola tutti i 2-simplessi di $[L]$ (con una opportuna scelta dell'orientazione) tale che $\partial[L]$ sia un 1-bordo supportato esattamente su ∂L.

(c) Dimostrare che, se $b_1 \in B_1(K)$, allora (a meno di suddividere baricentricamente K più volte) esiste una superficie simpliciale L, una orientazione su $|L|$ e un morfismo simpliciale $\varphi : L \to K$ tale che $C_2(\varphi)[L] \in C_2(K)$ ha bordo uguale a b_1.

(d) Dimostrare che, se K è connesso e $x \in |K|$, l'applicazione naturale $\pi_1(|K|, x) \to H_1(K)$ induce un isomorfismo $\pi_1(|K|, x)^{ab} \cong H_1(K)$ dall'abelianizzato del π_1.
(Ricordare l'esercizio 4(g) e 4(h).)