Esercizi di topologia algebrica (21 novembre 2018)

Def. Date applicazioni continue $f : Y \to X$ e $g : Z \to X$, il prodotto fibrato $Y \times_X Z$ è definito come

$$Y \times_X Z := \{(y,z) \in Y \times Z \,|\, f(y) = g(z)\}$$

ed è munito della topologia di sottospazio. Le due proiezioni naturali $g' : Y \times_X Z \to Y$ e $f : Y \times_X Z \to Z$ sono continue e $f \circ g' = g \circ f'$.

Esercizio 1. Sia $p : \widetilde{X} \to X$ un rivestimento e sia $f : Y \to X$ una applicazione continua. Sia $\widetilde{Y} := \widetilde{X} \times_X Y$ il prodotto fibrato con la proiezione naturale $p' : \widetilde{Y} \to Y$. Dimostrare che p' è un rivestimento e che c'è una biiezione naturale tra la fibra di p' sopra $y \in Y$ e la fibra di p sopra $f(y) \in X$. Dedurne che, se $Z \subset X$, allora la restrizione di p a $p^{-1}(Z) \to Z$ è un rivestimento.

Esercizio 2. (a) Dimostrare che, se $q : \mathbb{RP}^{2n} \to Y$ è un rivestimento, allora q è un omeomorfismo.

(b) Dimostrare che, se $p : \mathbb{CP}^{2n} \to X$ è un rivestimento, allora p è un omeomorfismo.

(c) Siano $p \geq 3$ primo e $k \in [1, p-1]$ intero, e sia $\mu_p \subset S^1$ il sottogruppo delle radici p-esime dell'unità, generato da $\zeta = \exp(2\pi i/p)$. Dimostrare che l'azione di μ_p su $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ generata da $\zeta \cdot (z_1, z_2) := (\zeta z_1, \zeta^k z_2)$ è libera e propriamente discontinua (con la definizione non standard). Concludere che $S^3 \to L(k,p) := S^3/\mu_p$ è un rivestimento di grado p. È vero che tale azione discende ad una azione libera e propriamente discontinua di μ_p su $\mathbb{RP}^3$?

(d) Tramite l'identificazione $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, esprimere la mappa antipodale $A : S^2 \to S^2$ nelle coordinate omogenee $[Z_0 : Z_1]$ di $\mathbb{CP}^1$. Esibire un omeomorfismo $\mathbb{CP}^{2n+1} \to \mathbb{CP}^{2n+1}$ senza punti fissi di ordine 2.

Def. Un **gruppo topologico** è uno spazio topologico puntato (G, e) munito di due applicazioni continue $m : G \times G \to G$ (moltiplicazione) e $i : G \to G$ (inverso) che lo rendano un gruppo con elemento neutro e.

Esercizio 3. Sia (G, e) un gruppo topologico e sia $p : \widetilde{G} \to G$ un rivestimento con $\widetilde{G}$ connesso per archi.

(a) Dimostrare che $\pi_1(G, e)$ è abeliano. (Se non vedete l'omotopia tra $\alpha * \beta$ e $\beta * \alpha$, saltate questo punto.)

(b) Dare una struttura di gruppo topologico a $\widetilde{G}$ in modo tale che p sia un omomorfismo di gruppi. Chi è il nucleo di p?

Esercizio 4. Sia $\mathrm{T}_n^+(\mathbb{K})$ lo spazio delle matrici triangoli superiori $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ con entrate reali e strettamente positive sulla diagonale principale.

(a) Usando Gram-Schmidt, dimostrare che ogni matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si può scrivere come il prodotto $M = RQ$ con $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ e $R \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{R})$ Dimostrare inoltre che tale scrittura è unica.

(b) Dimostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ si retrae per deformazione (forte) su $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(c) Calcolare il numero di componenti connesse di $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ e $\pi_1(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \mathrm{I})$.

(d) Analogo di (a), usando $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $Q \in \mathrm{U}_n$ e $R \in \mathrm{T}_n^+(\mathbb{C})$

(e) Dimostrare che $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ si retrae per deformazione (forte) su U_n e calcolare le componenti connesse e il gruppo fondamentale di $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.