Esercizi di topologia algebrica (29 novembre 2018)

Esercizio 1. Per ogni $n \geq 1$ esibire un'applicazione $S^n \to S^n$ suriettiva di grado 0.
Per ogni $n \geq 1$ e ogni $d \in \mathbb{Z}$, esibire una applicazione $S^n \to S^n$ di grado d.

Esercizio 2. Sia $p \in \mathbb{C}[t]$ un polinomio di grado d.

(a) Dimostrare che la funzione polinomiale $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ associata si estende a $\hat{p} : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$, dove $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{CP}^1$.

(b) Dimostrare che $\hat{p}$ ha grado esattamente d.

(c) Dimostrare che, se la derivata $p' = dp/dt$ si annulla in $z_0 \in \mathbb{C}$ all'ordine k, allora $\deg_{z_0}(p) = k + 1$.

Esercizio 3. Denotiamo con χ la caratteristica di Eulero.

(a) Siano X, Y complessi cellulari compatti. Calcolare $\chi(X \times Y)$ in funzione di $\chi(X)$ e $\chi(Y)$.

(b) Sia $p : E \to B$ un fibrato localmente banale con fibra F e supponiamo che B, F siano compatti e triangolabili. Calcolare $\chi(E)$ in funzione di $\chi(B)$ e $\chi(F)$.

Esercizio 4 ($\star$). Sia Δ^n l'n-simplesso standard (che identificheremo con il disco chiuso D^n), che vedremo come realizzazione del complesso simpliciale $\mathcal{P}(n)$ consistente delle parti non vuote dell'insieme $\{0, 1, \ldots, n\}$. Denotiamo con $\partial\mathcal{P}(n)$ il suo bordo, ossia il complementare dell'elemento $\{0, 1, \ldots, n\}$.

(a) Dimostrare che, se K è un complesso simpliciale, allora alla sua realizzazione $|K|$ può essere data la struttura di complesso di celle, il cui n-scheletro è $|K^{(n)}|$.

(b) Sia K un complesso simpliciale di dimensione n, sia $\mathcal{P}'(n)$ il complesso simpliciale ottenuto da $\mathcal{P}(n)$ suddividendolo baricentricamente due volte e sia $\psi : \partial\mathcal{P}'(n) \to K^{(n-1)}$ un morfismo simpliciale. Dimostrare che è possibile dare una struttura di complesso di celle all'incollamento $|K| \cup_{|\psi|} |\mathcal{P}'(n)|$.

(c) Dimostrare che, se K un complesso simpliciale di dimensione n e $\varphi : \partial D^n \to |K^{(n-1)}|$ è una applicazione continua, allora $|K| \cup_\varphi e^n$ è omotopicamente equivalente alla realizzazione geometrica di un complesso simpliciale.

(d) È vero che ogni complesso di celle X è omotopicamente equivalente alla realizzazione geometrica $|K|$ di un complesso simpliciale?