UNA PICCOLA INTRODUZIONE ALLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

DONATELLA RICALZONE & EUGENIO MONTEFUSCO

PROGETTO LAUREE SCIENTIFICHE
05 SETTEMBRE 2019
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA

Indice

1. Disequazioni nel piano 2
2. Sistemi di disequazioni 4
3. Esempi di Programmazione Lineare 6
4. Il metodo del Simplesso 11
5. Suggerimenti 11

Questi appunti sono un abbozzo della chiacchierata svolta con circa settanta studenti di scuole secondarie (di secondo grado) del Lazio. Sono ovviamente migliorabili (come forma, contenuti e approcccio didattico), ma nonostante questo speriamo che siano risultati utli alla comprensione di alcune idee della programmazione lineare e che siano servite a non annoiarsi...

1. Disequazioni nel piano

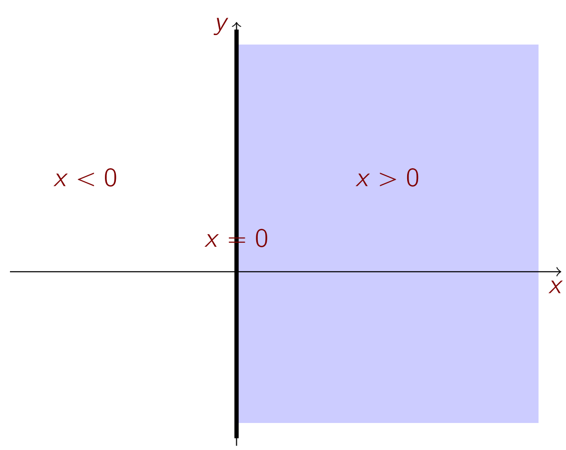
In questo paragrafo discuteremo, brevemente, di disequazioni lineari in due variabili, cioè disequazioni del tipo

$$ax + by + c \leqslant 0 \qquad a, b, c \in \mathbf{R} \tag{1.1}$$

cercando di rappresentare graficamente le soluzioni della relazione come un sottoinsieme del piano cartesiano xOy.
Cominciamo la nostra chiacchierata con un esempio molto semplice discutendo la seguente disequazione in due variabili

$$x \geqslant 0$$

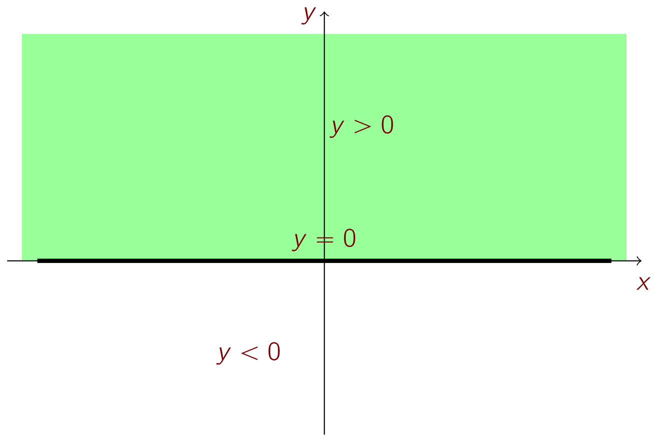
La prima obiezione è che si tratta di una disequazione in una sola variabile, la x, ma in realtà è semplicemente che la variabile y ha coefficiente nullo, in questo caso abbiamo che (riferendoci alla formula (1.1)) $a = -11$ e $b = c = 0$. Comunque la nostra disequazione è decisamente facile da risolvere, infatti, come disequazione nelle due variabili (x, y), individua tutti i punti del piano aventi ascissa non negativa, che possiamo viualizzare come segue



osserviamo che l'insieme delle soluzioni è un semipiano chiuso! Per completezza precisiamo che chiameremo un semipiano chiuso se contiene la retta che lo delimita, un semipiano privato della retta che descrive il suo confine verrà detto aperto.
Passiamo ad analizzare un altro caso molto molto semplice

$$y > 0$$

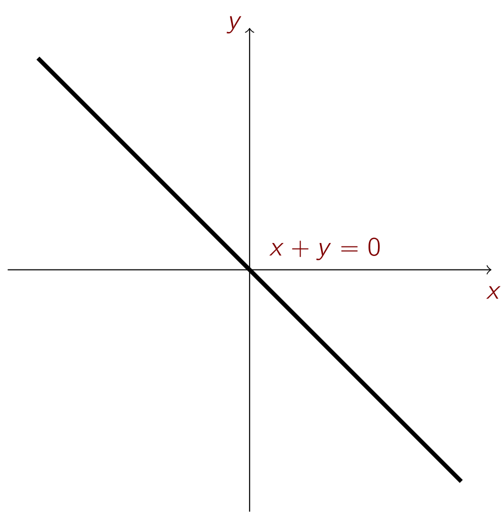
questa nuova disequazione individua tutti i punti del piano aventi ordinata positiva, quindi le soluzioni sono rappresentate nel disegno che segue



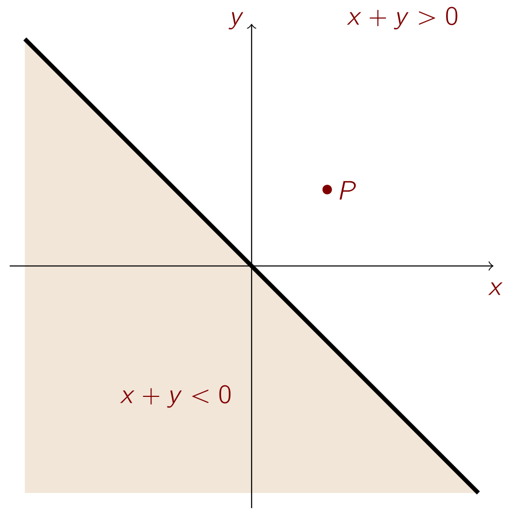
notiamo che, nuovamente, l'insieme delle soluzioni è un semipiano (questa volta un semipiano aperto). Ora complichiamo leggermente la situazione e affrontiamo la seguente disequazione

$$x + y \leqslant 0$$

Il ragionamento che faremo per individuare i punti che soddisfano la precedente relazione parte dallo studio dei punti che soddisfano l'uguaglianza (come sempre avviene per le disequazioni), quindi cominciamo tracciando la retta $x + y = 0$, che è la bisettrice del secondo e quarto quadrante



adesso cerchiamo di capire come individuare i punti che risolvono la disequazione vera e propria: come suggeriscono i primi due esempi la retta (cioè il luogo dei punti del piano per cui vale $x+y = 0$) divide il piano in due semipiani, uno dei due è il luogo dei punti tali che $x + y > 0$, l'altra parte deve essere dove vale $x + y < 0$.
A questo punto la situazione è abbastanza facile: è sufficiente considerare un punto del piano (per esempio $P(1, 1)$ (basta che non giaccia sulla retta!) e verificare quale disuguaglianza soddisfi per capire in quale dei due semipiani P si trovi, nel nostro caso $1 + 1 = 2 > 0$, quindi otteniamo la seguente descrizione del luogo delle soluzioni



Il ragionamento appena fatto può essere ripetuto alla disequazione generale (1.1). Applichiamo la seguente trasformazione nel piano introducendo, per esempio, le coordinate

$$\begin{cases} X = ax \\ Y = by + c \end{cases}$$

tramite cui il semipiano $X + Y > 0$ viene trasformato nel semipiano $ax + by + c > 0$. Questo ragionamento mostra come la discussione precedente si possa applicare a (1.1).
Si noti che le trasformazioni appena presentate risolvono il problema solo quando $a, b \neq 0$, se entrambi i parametri sono nulli la disequazione ha come soluzione l'intero piano o l'insieme vuoto (a secondo del segno del parametro c). Se solo uno dei parametri è nullo usando una delle seguenti trasformazioni

$$X = ax + c \qquad \text{o} \qquad Y = by + c$$

è possibile ricondursi a uno dei primi casi discussi.

Esercizi. Si risolvano graficamente le seguenti disequazioni

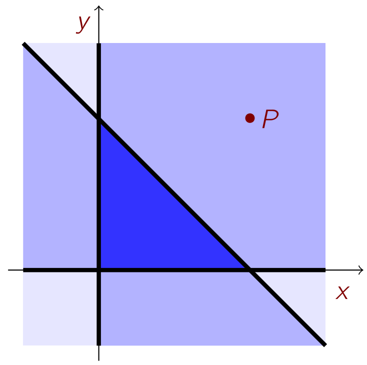
$$x-y \geqslant 0 \qquad x+y \geqslant 0 \qquad x-3y+6 \leqslant 0 \qquad y \geqslant 2 \qquad -x+2y-3 \leqslant 0 \qquad 2x-y+3 \leqslant 0$$

2. Sistemi di disequazioni

La discussione della precedente sezione ci permette di caratterizzare, con una certa facilità, l'insieme delle soluzioni di più disequazioni in due variabili. Infatti abbiamo visto che le soluzioni di una disequazione costituiscono un semipiano (in casi eccezionali l'intero piano o l'insieme vuoto), quindi le soluzioni di un sistema sono i punti comuni ai semipiani individuati dalle disequazioni, ovviamente tale intersezione può essere vuota o non vuota, come vedremo tramite qualche esempio. Studiamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y - 1 \leqslant 0 \end{cases}$$

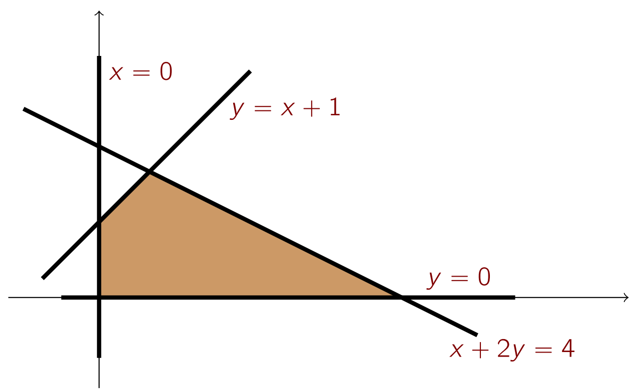
sappiamo che le rette associate alle equazioni sono i due assi cartesiani e la retta parallela alla bisettrice del secondo e quarto quadrante passante per il punto $(0, 1)$, testando con il punto $P(1, 1)$ per capire quali sempiani risolvono le disequazioni giungiamo al seguente risultato



dove l'area più scura evidenzia la regione del piano comune ai tre semipiani.
Adesso complichiamo considerando un sistema leggermente più grande

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + 2y - 4 \leqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases}$$

come prima disegnamo le rette che delimitano i semipiani e, testando con un punto a scelta, individuiamo la regione del piano che rappresenta l'intersezione delle soluzioni delle singole disequazioni



dove l'area colorata evidenzia la regione del piano comune ai quattro semipiani che (rispettivamente) risolvono le disequazioni.
Raccogliamo nel seguente enunciato alcune propriet'a dei sistemi di disequazioni lineari intere in due variabili

Teorema 2.1. *Consideriamo il seguente sistema di $k \in \mathbf{N}$ disequazioni lineari intere*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 \leqslant 0 \\ \dots \\ a_kx + b_ky + c_k \leqslant 0 \end{cases} \qquad a_i, b_i, c_i \in \mathbf{R}$$

l'insieme delle soluzioni del sistema è una regione (sottoinsieme) del piano $\mathbf{R}^2$ determinata dall'intersezione di k semipiani chiusi, può essere una regione convessa illimitata e chiusa, l'insieme vuoto o un poligono (non necessariamente regolare) chiuso, limitato e convesso.

Esercizi. Si risolvano graficamente i seguenti sistemi di disequazioni lineari intere

$$\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x - y \geqslant 0 \\ -y \leqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \leqslant 1 \\ x - y + 6 \leqslant 0 \\ y \geqslant 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 1 \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x - y + 3 \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 2x - y \leqslant 1 \\ x - 2y \leqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 0 \\ x - 2y \geqslant 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x + 6 \leqslant 0 \\ y \leqslant 2 \\ y \geqslant -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 1 \geqslant 0 \\ y - 2 \geqslant 0 \\ x + 2y \geqslant 0 \\ x + y \leqslant 5 \end{cases}$$

3. Esempi di Programmazione Lineare

Finalmente siamo pronti ad entrare nel vivo dell'argomento! Come nelle pagne precedenti analizziamo un esempio, dal quale estrapolare, in un secondo momento, una strategia generale. Useremo questo esempio anche per introdurre le definizioni e gli strumenti necessari a raggiungere i nostri obbiettivi.

Esempio. *Supponiamo che una pasticceria produca due tipi di creme: crema al limone e crema alla cannella. Per chilo di prodotto sono utilizzate le quantità di ingredienti riportate nella tabella seguente*

ingredienti	*crema al limone*	*crema alla cannella*
latte	$12l$	$23l$
panna	$35l$	$20l$
uova	40	25
zucchero	$230g$	$180g$

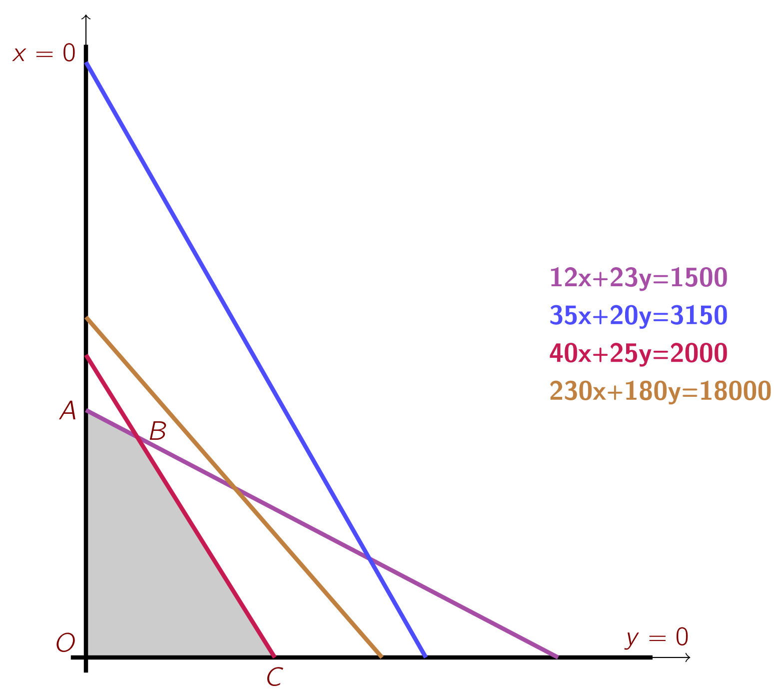
la disponibilità giornaliera degli ingredienti è di $1500l$ *di latte,* $3150l$ *di panna,* 2000 *uova e* $18Kg$ *di zucchero. I dolci sono venduti (rispettivamente) al prezzo di* $12€/Kg$ *e* $20€/Kg$*. Si scriva un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera che massimizza i profitti e si determini graficamente la soluzione ottimale.*

Le variabili (incognite) in gioco sono le quantità dei due tipi di dolci da produrre giornalmente, spesso vengono dette **variabili di controllo o di decisione**, sia x la quantità di crema al limone ed y la quantità di crema alla cannella.
Vogliamo massimizzare il profitto totale, cioè la quantità $p = 12x + 20y$. Tale variabile viene detta **funzione obbiettivo**, visto che lo scopo da raggiungere la coinvolge direttamente. In altri problemi potrà succedere che la funzione obbiettivo debba essere resa minima.
Ancora una osservazione: gli ingredienti richiesti non possono superare la disponibilità, né essere delle quantità negative, quindi abbiamo delle limitazioni che possiamo tradurre nel seguente sistema di sei disequazioni

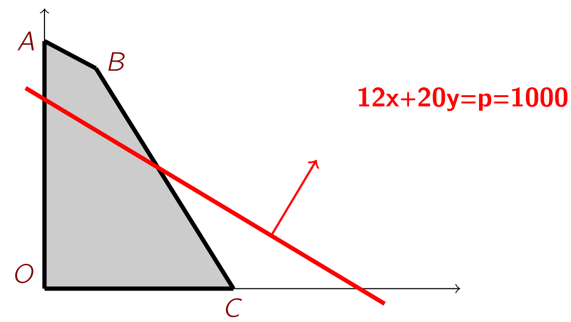
$$\begin{cases} 12x + 23y \leqslant 1500 \\ 35x + 20y \leqslant 3150 \\ 40x + 25y \leqslant 2000 \\ 230x + 180y \leqslant 18000 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$$

infatti la prima disuguaglianza traduce in formule il fatto che la somma dei prodotti tra la quantità di un tipo di crema e la quantità di latte necessaria per la produzione non deve superare il valore di 1500, che è la disponibilità totale di materia prima. Le successive tre disequazioni indicano la necessità di non sforare la disponibilità di panna, uova e zucchero (rspettivamente), infine le ultime due disuguaglianze

esprimono il fatto che le variabili di controllo sono il peso delle creme prodotte, e (naturalmente) tale numero non può essere negativo.
Tali disequazioni esprimono la presenza di **vincoli** nel problema reale, cioè il fatto che le quantità con cui abbiamo a che fare sono soggette a delle richieste in modo che il modello descriva convenientemente il problema che vogliamo affrontare.
Un problema di **programmazione lineare** consiste nell'ottimizzare (cioè massimizzare o minimizzare) una funzione obbiettivo, tenendo conto di alcuni vincoli, agendo sulle variabili di controllo, tutte le espressioni che descrivono gli attori in questione devono essere delle funzioni lineari intere (da cui il nome di programmazione lineare) nelle variabili di controllo.
Dopo aver tradotto il problema in termini matematici, possiamo iniziare la risoluzione. Il punto di partenza è lo studi dei vincoli (cioè del sistema di disequazioni) per individuare la regione delle decisioni ammissibili, la zona del piano in cui i nostri controlli possono stare. Nel nostro caso abbiamo



La regione evidenziata è l'intersezione dei sei semipiani: un quadrilatero individuato dai punti di coordinate $O(0,0)$, $A(0,1500/23)$, $B(425/31,1800/31)$ e $C(50,0)$. Questa è la regione in cui possiamo fissare i valori per le variabili di controllo.
Per capire come procedere nella ricerca del massimo per la funzione obbiettivo, al variare della coppia (x,y) nella regione ammissibile, osserviamo che la funzione obbiettivo genera un fascio improprio di rette, cioè infnite rette parallele. Infatti fissando un valore di p otteniamo l'equazione di una retta in cui i parametri direttori non cambiano, quindi tutte le rette risultante sono parallele. Proviamo a tracciare la retta generata dalla scelta $p = 1000$ nell'espressione della funzione obbiettivo e ragioniamo sulla figura risultante



Variando la quantità p muoviamo al retta associata alla funzione obiettivo, la freccia indica la direzione di movimento della retta al crescere di p. Naturalmente siamo interessati ad incrementare il più possibile il profitto, quindi il nostro problema equivale a capire fino a quanto possiamo spingerci ad aumentare la variabile p facendo in modo che la retta abbia intersezione con la regione ammissibile per le variabili di controllo. Geometricamente dovrebbe essere intuitivo che il valore massimo di p sarà ottenuto al passaggio della retta per uno tra i punti A o B (al limite potrebbe succedere che il segmento $\overline{AB}$ sia parallelo al fascio di rette generato dalla funzione obbiettivo e quindi che i due valori coincidano). Nel nostro caso troviamo che

$$A(0, 1500/23) \longrightarrow p_A = \frac{30000}{23} \simeq 1304,35$$
$$B(425/31, 1800/31) \longrightarrow p_B = \frac{41100}{31} \simeq 1325,81$$

quindi la produzione ottimale (in termini di profitto) è determinata dal punto B della regione ammissibile, cioè dalla scelta

$$x \simeq 13,71Kg \qquad\qquad y \simeq 58,06Kg$$

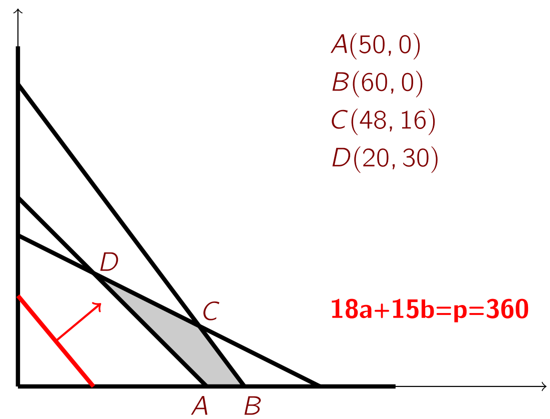
Cerchiamo di fissare le ideee studiando un altro problema.

Esempio. *Un imprenditore vuole programmare la produzione di due beni* A *e* B*, ottenuti utilizzando due macchine M1 e M2, che possono lavorare settimanalmente per* $40h$ *ciascuna. Per produrre una unità di* A *occorrono* $40'$ *di lavoro di M1 e* $30'$ *di lavoro di M2; per produrre una unità di* B *occorrono* $30'$ *di lavoro di M1 e* $60'$ *di lavoro di M2. Per esigenze di produzione, ogni settimana devono essere prodotte complessivamente almeno 50 unità.*
Sapendo che il costo di produzione di ogni unità di A è di 18€ *ed il costo di produzione di ogni unità di B è di* 15€*, determinare la combinazione produttiva di minimo costo complessivo.*

In questo caso la funzione obiettivo, che dobbiamo minimizzare, è la quantità $p = 18a + 15b$, dove abbiamo indicato con a il numero di unità di A prodotte e con b il numero di B. Inoltre sappiamo che dobbiamo produrre in totale almeno 50 unità, cioè che $a + b \geqslant 50$, e che le che apparecchiaturee non devono essere operative per più di $40h = 2400'$ settimanalmente, cioè che $40a + 30b \leqslant 2400$ e che $30a + 60b \leqslant 2400$, rispettivamente, tenendo conto dei tempi di produzione. Riassumento abbiamo

$$p = 18a + 15b \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} a \geqslant 0 \qquad b \geqslant 0 \\ 40a + 30b \leqslant 2400 \\ 30a + 60b \leqslant 2400 \\ a + b \geqslant 50 \end{cases} \qquad \text{cioè} \qquad \begin{cases} a \geqslant 0 \qquad b \geqslant 0 \\ 4a + 3b \leqslant 240 \\ a + 2b \leqslant 80 \\ a + b \geqslant 50 \end{cases}$$

graficamente otteniamo



Ricordando che dobbiamo minimizzare la funzione obbiettivo i controlli candidati si trovano sul segmento $\overline{AD}$, imponendo il passaggio delle rette del fascio negli estremi otteniamo che il punto ottimale è D e che i controlli ottimali sono $(a, b) = (20, 30)$.

Per concludere il paragrafo enunciamo alcuni risultati notevoli.

Teorema 3.1. *L'intersezione di più semipiani risulta essere sempre un insieme convesso (eventualmente tutto lo spazio o l'insieme vuoto). Quindi la regione ammissibile in un problema di programmazione lineare, se non è vuota e non è illimitata, è sempre un poligono limitato convesso.*

Teorema 3.2. *La funzione obbiettivo lineare di equazione $p = ax + by$, per p fissato, descrive sempre una retta nel piano appartenente ad un fascio improprio. Al crescere del parametro p la retta si sposta lungo la direzione individuata dal vettore (a, b).*

Teorema 3.3 (teorema fondamentale della programmazione lineare)**.** *Il massimo ed il minimo di una funzione obbiettivo lineare di un numero qualsiasi di variabili soggetta a vincoli espressi da equazioni e/o disequazioni lineari, se esistono, si trovano sui vertici (eventualmente tutta una faccia del bordo) della regione ammissibile e mai al suo interno.*

Osservazione Si noti che se la regione ammissibile è chiusa e limitata il problema ha sempre (almeno) una soluzione (per il teorema di Weierstrass...), se la regione non è limitata il problema può non avere soluzione (dipende dalla geometria della regione ammissibile e se la funzione ammissibile deve essere massimizzata o minimizzata).

Esercizi.

1. Una fabbrica di giocattoli produce due tipi di trenini, di cui il primo tipo è di legno ed il secondo in plastica. Il processo produttivo si svolge in tre reparti. La fabbrica impiega 18 operai nel primo reparto, 10 nel secondo e 8 nel terzo. Gli operai lavorano 8 ore al giorno per 5 giorni a settimana. I tempi di lavorazione, in minuti, richiesti e i relativi profitti sono descritti dalla seguente tabella

prodotti	reparto 1	reparto 2	reparto 3	profitto
treno 1	$25'$	$40'$	$7'$	45€
treno 2	$50'$	$70'$	$10'$	65€

Si dica come organizzare la produzione in modo da massimizzare il guadagno per settimana di produzione.

2. Una industria vuole commercializzare un prodotto dietetico che contiene due sostanze S_1 ed S_2 che forniscano una giusta quantità di vitamine: l'obbiettivo è di fare una miscela delle due sostanze che fornisca la giusta quantità di vitamine con il minimo costo.
La sostanza S_1 costa $0,50$€ all'etto e contiene all'etto $0,8$mg di B_1, 1mg di B_2 e $0,8$mg di B_6.
La sostanza S_2 costa $0,35$€ all'etto e contiene all'etto $0,6$mg di B_1, $0,6$mg di B_2 e $0,9$mg di B_6.
Il contenuto minimo delle tre vitamine deve essere: $2,8$mg di B_1, 9mg di B_2 e 10mg di B_6.

3. Una falegnameria produce mobili usando legno di pino, di noce e di mogano; del primo ha una disponibilità mensile di 4q, del secondo di 3q e del terzo di 2q. I modelli di mobile sono soltanto due: M ed N. Per produrre una unità di M occorrono 2Kg di pino, 4Kg di noce e 1Kg di mogano, mentre per produrre una unità di N occorrono, invece, 3Kg di pino, 1Kg di noce e $1,5$ di mogano.
Se il guadagno unitario per M è di 300€, e quello per N è di 250€, quanti mobili del tipo M e quanti del tipo N devono essere prodotti per rendere massimo il guadagno complessivo?

4. Un coltivatore ha a disposizione 12 ettari di terreno da coltivare a lattuga o a patate. Le risorse a sua disposizione, oltre al terreno, sono: $70kg$ di semi di lattuga, $18t$ di tuberi, $160t$ di concime. Supponendo che il mercato sia in grado di assorbire tutta la produzione e che i prezzi siano stabili, la resa stimata per la coltivazione di lattuga è di 3000€$/ettaro$ e quella delle patate è di 5000€$/ettaro$. L'assorbimento delle risorse per ogni tipo di coltivazione è di $7kg$ di semi e $10t$ di concime per ettaro di lattuga, e $3t$ di tuberi e $20t$ di concime per le patate. Stabilire quanto terreno destinare a lattuga e quanto a patate in modo da massimizzare la resa economica e sfruttando al meglio le risorse disponibili.

5. Un'azienda pubblicitaria deve svolgere un'indagine di mercato per lanciare un nuovo prodotto. Si deve contattare telefonicamente un campione significativo di persone: almeno 150 donne sposate, almeno 110 donne non sposate, almeno 120 uomini sposati e almeno 100 uomini non sposati. Le telefonate possono essere effettuate al mattino (al costo operativo di $1,1$€) o alla sera (al costo di $1,6$€). Le percentuali di persone mediamente raggiunte sono riportate nella seguente tabella

	mattina	sera
donne sposate	30%	30%
donne non sposate	10%	20%
uomini sposati	10%	30%
uomini non sposati	10%	15%
nessuno	40%	5%

6. Un dietologo deve preparare una dieta che garantisca un apporto giornaliero di proteine, ferro e calcio di almeno $20mg$, $30mg$ e $10mg$, rispettivamente. Il dietologo è orientato su cibi a base di verdura ($5mg/kg$ di proteine, $6mg/kg$ di ferro e $5mg/kg$ di calcio, al costo di 4€$/kg$), carne ($15mg/kg$ di proteine, $10mg/kg$ di ferro e $3mg/kg$ di calcio, al costo di 10€$/kg$) e frutta ($4mg/kg$ di proteine, $5mg/kg$ di ferro e $12mg/kg$ di calcio, al costo di 7€$/kg$). Determinare la dieta di costo minimo.

7. Si vogliono organizzare i turni degli infermieri in ospedale. Ogni infermiere lavora 5 giorni consecutivi, indipendentemente da come sono collocati all'interno della settimana, e poi ha diritto a due giorni consecutivi di riposo. Le esigenze di servizio per i vari giorni della settimana richiedono la presenza di 17 infermieri il lunedì, 13 il martedì, 15 il mercoledì, 19 il giovedì, 14 il venerdì, 16 il sabato e 11 la domenica. Organizzare il servizio in modo da minimizzare il numero totale di infermieri da impegnare.

8. Una ditta di produzione di elettrodomestici produce dei frigoriferi in tre stabilimenti e li smista in quattro magazzini intermedi di vendita. La produzione settimanale nei tre stabilimenti A, B e C è rispettivamente di 50, 70 e 20 unità. La quantità richiesta dai 4 magazzini è rispettivamente di 10, 60, 30 e 40 unità. I costi per il trasporto di un frigorifero tra gli stabilimenti e i magazzini 1, 2, 3 e 4 sono i seguenti

- dallo stabilimento A: 6, 8, 3, 4 euro;
- dallo stabilimento B: 2, 3, 1, 3 euro;
- dallo stabilimento C: 2, 4, 6, 5 euro.

La ditta vuole determinare il piano di trasporti di costo minimo.

4. Il metodo del Simplesso

In un problema generale le variabili di controllo possono essere moltissime, il che rende impossibile l'approccio geometrico-analitico descritto nelle pagine precedenti. Per ovviare a questo problema i matematici hanno elaborato un algoritmo per calcolatori che è stato implementato con notevole successo. L'algoritmo (nelle sue idee essenziali) è strutturato come segue

1. Verifica che il dominio ammissibile sia non vuoto.
2. Trova un vertice e calcola se sia ottimale o meno.
3. Se il vertice non è ottimale cerca un vertice adiacente.

L'operazione cardine è la costruzione che permette di spostarsi lungo una direzione ammissibile in modo che il nuovo vertice sia ammissibile ma migliore di quello precedente... Entrare in dettaglio è ben oltre lo scopo di queste scarne pagine, per approfondire ulteriormente è possibile (ovviamente) rivolgersi alle risorse della rete www, e proviamo a proporre qualche suggerimento.
Cominciamo con qualche link di carattere divulgativo

- wikipedia
- matematicamente
- weschool
- unige

e proseguiamo con alcuni link dove è possibile trovare materiale di carattere più specialistico, quali appunti di lezioni in pdf e/o esercizi (a volte risolti), in genere questi scritti possono essere di carattere decisamente tecnico e richiedere prerequisiti di algebra lineare e/o programmazione su computer e, in ultima analisi, impegnativi da leggere e camprendere...

- appunti prof. Roma (capitoli 5, 6A e 6B).
- padova
- pitt
- standford