Capitolo 1

Il modello di Black e Scholes come limite del modello binomiale multiperiodale

1.1 Il Modello Binomiale Multiperiodale

Ricordiamo brevemente il Modello Binomiale Multiperiodale (o Cox-Ross-Rubinstein)

1.1.1 Ipotesi e notazioni

Il tasso di interesse è costante e vale r, mentre il prezzo dell'azione è dato da

$$S_0 = s_0 > 0, \qquad S_{n+1} = (1+\rho_{n+1})S_n = Z_{n+1}S_n$$

o in altre parole

$$S_0 = s_0 > 0, \qquad S_1 = (1+\rho_1)S_0 = Z_1 S_0 \quad \dots \quad S_n = (1+\rho_n)\cdots(1+\rho_2)(1+\rho_1)S_0 = Z_n \cdots Z_2 Z_1 S_0$$

dove le variabili aleatorie ρ_i possono assumere solo il valori a e b, con la condizione

$$a < r < b,$$

o equivalentemente le variabili aleatorie $Z_i = 1 + \rho_i$ possono assumere solo i valori

$$u = 1 + b, \qquad d = 1 + a,$$

con la condizione

$$d < 1 + r < u.$$

Si definisca

$$\xi_i = \mathbf{1}_{\{\rho_i = b\}} = \mathbf{1}_{\{Z_i = u\}}$$

ovvero la variabile aleatoria che vale 1 se il prezzo dell'azione sale e zero altrimenti, in modo che[1]

$$Z_i = u^{\xi_i}\, d^{1-\xi_i}.$$

[1]Il fatto che $Z_i = u^{\xi_i}\, d^{1-\xi_i}$ si verifica per ispezione:

$$Z_i = u \Leftrightarrow \xi_i = 1 \Leftrightarrow u^{\xi_i}\, d^{1-\xi_i} = u^1\, d^{1-1} = u$$
$$Z_i = d \Leftrightarrow \xi_i = 0 \Leftrightarrow u^{\xi_i}\, d^{1-\xi_i} = u^0\, d^{1-0} = d$$

Sia $H_n(\omega)$ la v.a. che conta il numero delle volte in cui il prezzo sale tra il passo 1 e il passo n, ossia

$$H_k(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{\{\rho_i = b\}} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{\{Z_i = u\}} = \sum_{i=1}^{k} \xi_i$$

in modo che

$$\begin{aligned} S_k N &= S_0\, u^{H_k}\, d^{k-H_k} = S_0\, \left(\frac{u}{d}\right)^{H_k}\, d^k \\ &= S_0\, (1+b)^{H_N}\, (1+a)^{k-H_k} = S_0\, \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^{H_k}\, (1+a)^k \end{aligned}$$

per ogni $k = 0, 1, ..., N$ e per ogni pay-off terminale[2] f_N (che deve essere $\mathcal{F}_N$-misurabile) il prezzo di esercizio può essere descritto dalla formula

$$C(f_N, \mathbb{P}) = C_N(f_N, \mathbb{P}) = B_0\, \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{f_N}{B_N}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{f_N}{(1+r)^N}\right]. \tag{1.1}$$

dove $\widetilde{\mathbb{E}}$ è il valore atteso rispetto alla probabilità $\widetilde{\mathbb{P}}$ rispetto alla quale gli eventi $\{Z_i = u\}$ sono indipendenti e tutti con probabilità

$$\tilde{p} = \frac{1+r-d}{u-d} = \frac{1+r-(1+a)}{(1+b)-(1+a)} = \frac{r-a}{b-a}.$$

Allora, per l'opzione call europea con prezzo di esercizio K e tempo di esercizio N,

$$C_{call}(K, \mathbb{P}) = C_{call,N}(K, \mathbb{P}) \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{(S_N - K)^+}{B_N}\right] \tag{1.2}$$

e quindi, tenendo conto che H_N ha distribuzione binomiale $Bin(N, \tilde{p})$ rispetto a $\widetilde{\mathbb{P}}$

$$\begin{aligned} C_{call}(K, \mathbb{P}) &= S_0 \sum_{x_0 < h \leq N} \binom{N}{h} \widetilde{p}^{\,h} (1-\widetilde{p})^{N-h} \left(\frac{1+b}{1+r}\right)^h \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^{N-h} \\ &\quad - \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{x_0 < h \leq N} \binom{N}{h} \widetilde{p}^{\,h} (1-\widetilde{p})^{N-h} \qquad (1.3) \\ &= S_0 \sum_{h=h_0}^{N} \binom{N}{h} \left(\frac{1+b}{1+r}\, \widetilde{p}\right)^h \left(\frac{1+a}{1+r}\, (1-\widetilde{p})\right)^{N-h} \\ &\quad - \frac{K}{(1+r)^N} \sum_{h=h_0}^{N} \binom{N}{h} \widetilde{p}^{\,h} (1-\widetilde{p})^{N-h}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

dove

$$x_0 = \ln\left(\frac{K}{S_0(1+a)^N}\right) \ln\left(\frac{1+b}{1+a}\right)$$

o equivalentemente

$$h_0 = \min\{j \,\epsilon\, \mathbb{N} : S_0(1+a)^{N-j}(1+b)^j - K > 0\}$$

[2] Si ricorda che stiamo trattando obbligazioni derivate di tipo europeo, che possono essere esercitate solo al tempo finale N, o tempo si esercizio, al contrario di quelle di tipo americano, che invece possono essere esercitate in un qualunque istante tra l'inizio del contratto e il tempo di esercizio.

1.2 Approssimazione del Modello Binomiale Multiperiodale

1.2.1 Il modello approssimato, a tempo continuo

Consideriamo ora il caso in cui gli scambi avvengono sempre più vicini nel tempo ovvero ai tempi $t_k^{(n)} = k/n$.

Consideriamo il tempo continuo, ma, per n fissato, i processi che ci interessano sono costanti negli intervalli tra un tempo $t_k^{(n)} = k/n$ e l'altro. Inoltre i parametri del modello, ossia r, u e d, dipenderanno da n, in modo da specificare e da tenere conto del fatto che si tratta di intervalli di ampiezza $1/n$.

Continuiamo ad indicare con B_k ed S_k il prezzo del titolo non rischioso (conto in banca) e del titolo rischioso (l'azione) rispettivamente, anche se, per mettere in evidenza la dipendenza dal parametro n sarebbe più opportuno denotarli con $B_k^{[n]}$ e $S_k^{[n]}$.

Supponiamo

$$B_t^{(n)} = B^{(n)}_{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = B_{\lfloor nt \rfloor} = B_0\,(1 + r(n))^{\lfloor nt \rfloor} \tag{1.5}$$

$$S_t^{(n)} = S^{(n)}_{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = S_{\lfloor nt \rfloor} = s_0 \left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right)^{H_{\lfloor nt \rfloor}} \left(d^{(n)}\right)^{\lfloor nt \rfloor} \tag{1.6}$$

dove il primo segno di uguaglianza sia in (1.5) che in (1.6), garantisce il fatto che i due processi $B_t^{(n)}$ ed $S_t^{(n)}$ sono costanti sugli intervalli di ampiezza $1/n$, mentre nell'ultima uguaglianza in (1.5) si sceglie

$$r^{(n)} = \frac{r}{n}, \tag{1.7}$$

e dove infine nell'ultima uguaglianza[3] in (1.6) si sceglie

$$u^{(n)} = e^{\sigma/\sqrt{n}} \qquad d^{(n)} = e^{-\sigma/\sqrt{n}}, \tag{1.8}$$

per una costante $\sigma > 0$.

Infine anche il valore del tempo di esercizio dipende da n in modo che

$$N^{(n)} = N_n(T), \tag{1.9}$$

dove $N_n(T)$ è il numero di intervalli di ampiezza $1/n$ contenuti in $[0, T]$, ovvero $N_n(T) = \lfloor nT \rfloor$.

Il risultato principale di questa sezione è riassunto nel seguente teorema, che corrisponde ad ottenere la formula di Black e Scholes come limite.

Teorema 1.1. *Posto $C_{call}^{(n)}(K, \mathbb{P})$ il prezzo della call europea nel modello binomiale dato da* (1.5) *e* (1.6)*, con i parametri definiti come in* (1.7) *e* (1.8)*, prezzo di esercizio K e tempo di esercizio $N_n(T)$, si ottiene che*

$$\lim_{n\to\infty} C_{call}^{(n)}(K, \mathbb{P}) = s_0\,\Phi\left(-\zeta + \sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-rT}\Phi(-\zeta), \tag{1.10}$$

dove Φ è la funzione di ripartizione della legge $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2} dz \left(= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+\infty} e^{-z^2/2} dz = 1 - \Phi(-x)*\right), x$$

e ζ dipende da K, T, r e σ nel seguente modo:

$$\zeta = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\log\left(\tfrac{K}{s_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right).$$

[3]Si noti che di nuovo, per non appesantire la notazione, non abbiamo utilizzato la notazione $H^{[n]}_{\lfloor nt \rfloor}$, che sarebbe stata più precisa.

Osservazione 1.1. *Tenendo conto che* $-r\,T = \log(e^{-rT}) = -\log(e^{rT})$*, con semplici passaggi si ottiene*

$$\zeta = -\Big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) + \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big), \quad -\zeta + \sigma\sqrt{T} = -\Big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) - \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big),$$

da cui, poiché, come già ricordato $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)*$*, il limite in* (1.10) *si riscrive come*

$$s_0\,\Phi\Big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) + \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big) - Ke^{-rT}\Phi\big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) - \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\big) \tag{1.11}$$

$$= s_0\,\Big[\Phi\Big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) + \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\Big) - \tfrac{K}{s_0\,e^{rT}}\,\Phi\big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}\log\big(\tfrac{s_0\,e^{rT}}{K}\big) - \tfrac{\sigma\sqrt{T}}{2}\big)\Big] \tag{1.12}$$

La forma (1.12)*, mette in evidenza come il prezzo si scriva come il prezzo iniziale* s_0 *della opzione, moltiplicato per un fattore che dipende solo dal rapporto*[4] $\frac{K}{s_0\,e^{rT}}$*, fra prezzo di esercizio* K *e prezzo forward della opzione stessa, (cioè* $s_0\,e^{rT}$*, il valore di* s_0 *attualizzato al tempo* T*).*

Prima di tutto commentiamo la scelta del riscalamento, ossia la scelta dei due processi (1.5) e (1.6). Ovviamente la scelta di $r^{(n)}$ in (1.7) corrisponde alla necessità che il tasso di interesse sia proporzionale all'ampiezza degli intervalli $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) = [\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$, ossia si abbia

$$B^{(n)}_{t_k^{(n)}} = B_k\big(= B_k^{[n]}\big) = B_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^k$$

e che rimanga costante in tutto l'intervallo $[t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)})$, ovvero che

$$B_t^{(n)} = B^{(n)}_{t_k^{(n)}} = B_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^k \qquad \text{per } t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) = [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n})$$

o in altre parole che, se, analogamente a $N_n(T)$,

$$N_n(t) = \lfloor nt \rfloor \tag{1.13}$$

è il numero di intervalli di ampiezza $1/n$ che si trovano nell'intervallo $[0, t]$, allora

$$B_t^{(n)} = B_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{N_n(t)}$$

o meglio

$$B_t^{(n)} = B^{(n)}_{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = B_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}. \tag{1.14}$$

Inoltre è ragionevole pensare che i cambiamenti del prezzo si discostino di poco in un intervallo di tempo così piccolo, ed in effetti si suppone che

$$S^{(n)}_{t_k^{(n)}} = Z_k^{(n)}\,S^{(n)}_{t_{k-1}^{(n)}} = \left(1 + \rho_k^{(n)}\right)\,S^{(n)}_{t_{k-1}^{(n)}}$$

dove i valori ammissibili per $Z_k^{(n)}$ sono solo $u^{(n)} = e^{\sigma/\sqrt{n}}$ e $d^{(n)} = e^{-\sigma/\sqrt{n}}$, ed in effetti le successioni $u^{(n)}$ e $d^{(n)}$ convergono entrambe ad 1, ovvero, più precisamente,

$$u^{(n)} \underset{n\to\infty}{\searrow} 1 \qquad d^{(n)} \underset{n\to\infty}{\nearrow} 1,$$

Si noti inoltre che, tenendo conto che

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + o(x^2),$$

[4]Ricordiamo che l'opzione si dice alla pari o *at the money* se $K = s_0\,e^{rT}$, *out of the money* se $K < s_0\,e^{rT}$, e *in the money* se invece $K > s_0\,e^{rT}$.

la definizione (1.8) corrisponde a

$$u^{(n)} = 1 + (\sigma/\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\,(\sigma^2/n) + o(1/n) \qquad d^{(n)} = 1 - (\sigma/\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\,(\sigma^2/n) + o(1/n), \tag{1.15}$$

e quindi la condizione di completezza e di assenza di arbitraggio, ossia

$$d^{(n)} < 1 + r^{(n)} < u^{(n)} \quad \Leftrightarrow \quad a^{(n)} < r^{(n)} < b^{(n)}$$

diviene

$$-(\sigma/\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\,(\sigma^2/n) + o(1/n) < r/n < (\sigma/\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\,(\sigma^2/n) + o(1/n), \tag{1.16}$$

che è chiaramente soddisfatta per n sufficientemente grande.

In altri termini si suppone che

$$u^{(n)} = 1 + b^{(n)} \qquad d^{(n)} = 1 + a^{(n)}.$$

dove

$$b^{(n)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{n} + o(\tfrac{1}{n}) \qquad a^{(n)} = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \tfrac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{n} + o(\tfrac{1}{n})$$

e che

$$S_t^{(n)} = S^{(n)}_{t_k^{(n)}}, \qquad \text{per } t \in [t_k^{(n)}, t_{k+1}^{(n)}) = [\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n})$$

ovvero, se come prima, $N_n(t) = \lfloor nt \rfloor$ è il numero di intervalli di ampiezza $1/n$ che si trovano nell'intervallo $[0,t]$, allora, tenendo presente che

$$\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}} = \frac{e^{\sigma/\sqrt{n}}}{e^{-\sigma/\sqrt{n}}} = e^{2\sigma/\sqrt{n}},$$

si può anche scrivere

$$\begin{aligned} S_t^{(n)} &= S_{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}}\,\big(= S^{[n]}_{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}}\big) = S_0 \left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right)^{H_{N_n(t)}} \left(d^{(n)}\right)^{\lfloor N_n(t) \rfloor} \\ &= S_0 \left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right)^{H_{\lfloor nt \rfloor}} \left(d^{(n)}\right)^{\lfloor nt \rfloor} \\ &= S_0\, e^{2\sigma \frac{1}{\sqrt{n}} H_{\lfloor nt \rfloor}}\, e^{-\sigma \frac{1}{\sqrt{n}} \lfloor nt \rfloor} \\ &= S_0\, e^{\sigma \frac{1}{\sqrt{n}} \left(2\, H_{\lfloor nt \rfloor} - \lfloor nt \rfloor\right)}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Passiamo ora alla dimostrazione del Teorema 1.1, ossia della formula di Black e Scholes.

1.2.2 Dimostrazione della formula di Black e Scholes

Grazie al fatto che (almeno per n sufficientemente grande) il modello di mercato considerato è completo e privo di opportunità di arbitraggio, sappiamo che la misura martingala equivalente $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$ esiste ed è unica, e che, rispetto alla misura martingala equivalente $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$, gli eventi $\{Z_i^{(n)} = u\}$ sono indipendenti e con probabilità

$$\tilde{p}^{(n)} = \frac{1 + \frac{r}{n} - d^{(n)}}{u^{(n)} - d^{(n)}} = \frac{\frac{r}{n} - a^{(n)}}{b^{(n)} - a^{(n)}} = \frac{\frac{r}{n} - (-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n}))}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n}) - (-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n}))},$$

o meglio

$$\begin{aligned} \tilde{p}^{(n)} &= \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2) + o(\frac{1}{n})}{2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2}{n} + o(\frac{1}{n})} = \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}(r - \frac{1}{2}\,\sigma^2) + o(\frac{1}{n})}{2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{n})} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r - \frac{1}{2}\,\sigma^2}{\sigma} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}}) = *\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\theta_n, \end{aligned}$$

dove $\theta_n = (r - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma + o(1)$ converge a $(r - \frac{1}{2}\sigma^2)/\sigma$ per n che tende all'infinito.*

Equivalentemente le variabili aleatorie ξ_i sono indipendenti e di valore atteso

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[\xi_i] = \tilde{p}^{(n)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}}).$$

Di conseguenza il prezzo di un derivato con maturità (tempo di esercizio) T e con pay-off terminale (contingent claim)

$$f(S_T^{(n)})$$

dovrà necessariamente avere come prezzo

$$C^{(n)}(f, \mathbb{P}) = \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\frac{f(S_T^{(n)})}{B_T^{(n)}}\right] \tag{1.18}$$

in particolare per l'opzione call

$$C_{call}^{(n)}(K, \mathbb{P}) = \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\frac{(S_T^{(n)} - K)^+}{B_T^{(n)}}\right] = \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\frac{(S_{N_n(T)} - K)^+}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{N_n(T)}}\right] \tag{1.19}$$

Abbiamo quindi un'espressione del prezzo, ma il problema a questo punto diviene complesso dal punto di vista numerico, almeno per n grande: il denominatore non comporta problemi in quanto si può approssimare con e^{rT}, mentre lo stesso non si può dire del numeratore.

Per risolvere questo problema ci viene in aiuto il Teorema Centrale del Limite. Si noti infatti che, qualunque sia $t > 0$

$$\log S_t^{(n)} = \log S_0 + H_{N_n(t)}\,\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right) + N_n(t)\,\log\left(d^{(n)}\right) = \log S_0 + \sum_{i=1}^{N_n(t)} \xi_i\,\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right) + N_n(t)\,\log\left(d^{(n)}\right),$$

e che $H_{N_n(t)}$, rispetto alla misura martingala equivalente $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$, è la somma di variabili aleatorie indipendenti tutte con la stessa distribuzione, che per $t > 0$ il numero $N_n(t) = \lfloor nt \rfloor$ converge all'infinito. Grazie al Teorema Centrale del Limite si ha che quindi $H_{N_n(t)}$ ha una distribuzione ***approssimativamente*** gaussiana, di valore atteso

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[H_{N_n(t)}] = N_n(t)\,\tilde{p}^{(n)}$$

e varianza

$$\widetilde{Var}^{(n)}(H_{N_n(t)}) = N_n(t)\,\tilde{p}^{(n)}(1 - \tilde{p}^{(n)}).$$

Per lo stesso motivo[5], sempre rispetto alla misura martingala equivalente $\widetilde{\mathbb{P}}^{(n)}$, anche il logaritmo di $S_t^{(n)}$ è approssimata da una variabile aleatoria gaussiana di valore atteso

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\log\left(S_t^{(n)}\right)\right] = \log S_0 + N_n(t)\,\tilde{p}^{(n)}\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right) + N_n(t)\,\log\left(d^{(n)}\right)$$

e varianza

$$\widetilde{Var}^{(n)}\left(\log\left(S_t^{(n)}\right)\right) = N_n(t)\,\tilde{p}^{(n)}(1 - \tilde{p}^{(n)})\left(\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right)\right)^2.$$

Ricordando che

$$\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}} = \frac{e^{\sigma/\sqrt{n}}}{e^{-\sigma/\sqrt{n}}} = e^{2\sigma/\sqrt{n}}, \qquad d^{(n)} = e^{-\sigma/\sqrt{n}},$$

si ha

$$\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right) = 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \log\left(d^{(n)}\right) = -\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

[5]Si ricordi che se Z ha distribuzione $N(\alpha, \beta^2)$, ovvero distribuzione gaussiana di valore atteso α e varianza β^2, allora anche $W = a + bZ$ ha distribuzione gaussiana, ma di valore atteso $\mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[a + bZ] = a + b\alpha$, e varianza $Var(W) = Var(a + bZ) = Var(bZ) = b^2 Var(Z) = b^2\beta^2$.

si ottiene che il valore atteso del logaritmo di $S_t^{(n)}$, vale

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\log\left(S_t^{(n)}\right)\right] &= \log S_0 + \lfloor nt\rfloor \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right) 2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \lfloor nt\rfloor\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \log S_0 + \lfloor nt\rfloor \left(\frac{1}{2}\,2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\,2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\,2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \log S_0 + \lfloor nt\rfloor \left(\frac{1}{n}\,\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\,2\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\\
&= \log S_0 + \frac{\lfloor nt\rfloor}{n}\,\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right) \approx \log S_0 + t\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right).
\end{aligned}$$

Analogamente la varianza vale

$$\begin{aligned}
\widetilde{Var}^{(n)}\left(\log\left(S_t^{(n)}\right)\right) &= N_n(t)\,\tilde{p}^{(n)}(1-\tilde{p}^{(n)})\left(\log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right)\right)^2\\
&= \lfloor nt\rfloor \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)\left(1-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\frac{r-\frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} + o(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\right)\right)\left(\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\\
* &= \lfloor nt\rfloor \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\theta_n\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\theta_n\right)\frac{4\sigma^2}{n} = \lfloor nt\rfloor\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\,n^2}\,\theta_n^2\right)\frac{4\sigma^2}{n} *\\
&\approx \lfloor nt\rfloor\,\frac{1}{4}\,\frac{4\sigma^2}{n} \approx t\sigma^2
\end{aligned}$$

Di conseguenza, se W_t è una variabile aleatoria gaussiana di valore atteso 0 e varianza t

$$\log(S_t^{(n)}) \overset{distr}{\to} \log S_0 + t\left(r-\tfrac{1}{2}\sigma^2\right) + \sigma\,W_t. \tag{1.20}$$

Osservazione 1.2. *Va notato che il precedente risultato si potrebbe ottenere anche direttamente, dimostrando che la funzione caratteristica della variabile aleatoria* $\log S_t^{(n)}$ *converge alla funzione caratteristica di* $\log(s_0) + r\,t - \frac{1}{2}\sigma^2\,t + \sigma\,W_t$*, ossia che*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\exp\{i\,u\log\left(S_t^{(n)}\right)\}\right] = e^{iu\left(\log(s_0\,e^{rt})-\frac{1}{2}\sigma^2\,t\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\,t\,u^2}.$$

In modo ancora più semplice si noti che dalla (1.17)*, si ottiene*

$$S_t^{(n)} = S_0\,e^{\sigma\frac{\sqrt{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{nt}}\,\frac{1}{\sqrt{\lfloor nt\rfloor}}\left(2\,H_{\lfloor nt\rfloor}-\lfloor nt\rfloor\right)}.$$

Ovviamente $\frac{\sqrt{\lfloor nt\rfloor}}{\sqrt{nt}}$ *converge ad 1, e per ottenere la convergenza basterebbe dimostrare direttamente che la funzione caratteristica della variabile aleatoria*

$$\frac{1}{\sqrt{\lfloor nt\rfloor}}\left(2\,H_{\lfloor nt\rfloor} - \lfloor nt\rfloor\right)$$

converge alla funzione caratteristica di $r\,t - \frac{1}{2}\sigma^2\,t + \sigma\,W_t$*, ossia che*

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\exp\{i\,u\log\left(S_t^{(n)}\right)\}\right] = e^{iu\left(r\,t)-\frac{1}{2}\sigma^2\,t\right)+\frac{1}{2}\sigma^2\,t\,u^2}.$$

La dimostrazione sarebbe sostanzialmente la stessa di quella del teorema centrale del limite, in quanto possiamo scrivere

$$2H_k - k = \sum_{j=1}^{k}(2\,\xi_j - 1)\Big(= 2\,H_k^{[n]} - k) = \sum_{j=1}^{k}(2\,\xi_j^{[n]} - 1)\Big)$$

come somma di variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite. L'unica differenza risiede nel fatto che le variabili aleatorie $2\,\xi_j - 1\big(= 2\,\xi_j^{[n]} - 1\big)$, hanno distribuzione che dipende da n: esattamente $2\,\xi_j^{[n]} - 1$ assumono i valori $+1$ e -1 con probabilità $\tilde{p}^{(n)}$ e $1 - \tilde{p}^{(n)}$, rispettivamente[6]. *Il calcolo del limite della funzione caratteristica in questo caso richiede quindi un minimo di attenzione in più.*

Va infine notato che, nel caso in cui invece si avesse più semplicemente il caso di variabili aleatorie $X_j := 2\,\xi_j - 1$, indipendenti e che assumono i valori $+1$ e -1 con probabilità $1/2$ (e quindi a valore atteso nullo), il teorema centrale del limite ci darebbe direttamente che

$$\frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}\big(2\,H_{\lfloor nt \rfloor} - \lfloor nt \rfloor\big) = \frac{1}{\sqrt{\lfloor nt \rfloor}}\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor}(2\,\xi_j - 1)$$

converge in distribuzione ad una variabile aleatoria gaussiana standard e quindi

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\big(2\,H_{\lfloor nt \rfloor} - \lfloor nt \rfloor\big) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor}(2\,\xi_j - 1)$$

converge ad una variabile aleatoria gaussiana di valore atteso nullo e varianza t.

Alternativamente, nel caso in cui invece la probabilità che $2\,\xi_j - 1 = +1$ fosse ancora $\tilde{p}^{(n)}(\neq 1/2)$ si potrebbe sottrarre ed aggiungere il valore atteso di $2\,\xi_j - 1$, ossia $2\,\tilde{p}^{(n)} - 1$ nella somma, ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor}(2\,\xi_j - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor}\big(2\,\xi_j - 1 - (2\,\tilde{p}^{(n)} - 1)\big) + \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{\lfloor nt \rfloor}(2\,\tilde{p}^{(n)} - 1).$$

La prima somma converge allora ad una variabile aleatoria gaussiana a valore medio nullo, mentre si potrebbe dimostrare che la seconda somma converge a $rt - \frac{1}{2}\sigma^2\,t$. Questa osservazione è alla base dell'idea che permette di costruire il moto browniano standard. Ad esso e' dedicata la sezione successiva.

Prima di proseguire nella dimostrazione del Teorema 1.1, dobbiamo ricordare che il simbolo $X_n \overset{distr}{\to}_{n\to\infty} X$ significa che la successione di variabili aleatorie X_n converge in distribuzione (o in legge) alla variabile aleatoria X. Non è necessario che le variabili aleatorie X_n ed X vivano sullo stesso spazio di probabilità, ma si può supporre che, per ogni n, la variabile aleatoria X_n sia definita nello spazio di probabilità $(\Omega^n, \mathcal{F}^n, \mathbf{P^n})$ e X sia definita nello spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. La convergenza in distribuzione significa la convergenza di $F_n(x) := \mathbf{P^n}(X_n \leq x)$ a $F(x) := \mathbf{P}(X \leq x)$ per ogni x tale che $F(x) = F(x^-)$, e che ciò è equivalente al fatto che[7] per ogni funzione continua e limitata f

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E^n}[f(X_n)] = \mathbf{E}[f(X)].$$

In altre parole che si può approssimare $\mathbf{E^n}[f(X_n)]$ con $\mathbf{E}[f(X)]$. Dopo questo richiamo possiamo tornare alla nostra dimostrazione.

A questo punto il prezzo di una opzione europea si può calcolare come

$$C^{(n)}(f, \mathbb{P}) = \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\frac{f(S_T^{(n)})}{B_T^{(n)}}\right] \approx \mathbf{E}\left[\frac{1}{e^{rT}}\,f(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\,\sigma^2)T+\sigma\,W_T})\right] \tag{1.21}$$

ed in particolare per l'opzione call

$$C_{call}^{(n)}(K, \mathbb{P}) = \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[\frac{(S_T^{(n)} - K)^+}{\big(1+\frac{r}{n}\big)^{N_n(T)}}\right] \approx \mathbf{E}\left[\frac{1}{e^{rT}}\,(S_0 e^{(r-\frac{1}{2}\,\sigma^2)T+\sigma\,W_T} - K)^+\right], \tag{1.22}$$

[6]Si osservi che $2\,x - 1 = 2\cdot 1 - 1 = 1$ se $x = +1$ e che $2\,x - 1 = 2\cdot 0 - 1 = -1$ se $x = 0$.

[7]Di solito nei corsi di base di probabilità si usa l'equivalenza con la convergenza per $f(x) = \exp i\,t\,x = \cos(tx) + i\,\sin(tx)$, e che corrisponde alla scelta di $f(x) = \cos(tx)$ o $f(x) = \sin(tx)$.

dove l'unica variabile aleatoria è W_T, in quanto $S_0 = s_0$ è il valore iniziale del prezzo dell'azione.

Abbiamo quindi visto come il prezzo di una opzione call europea si possa ottenere dalla formula

$$C_{call} = C(s_0, K, T, r, \sigma) = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\,(s_0 e^{(r-\frac{1}{2}\,\sigma^2)T+\sigma\,W_T} - K)^+\right]$$

dove si è messo in evidenza la dipendenza dai parametri del modello: S_0 prezzo iniziale della azione, K prezzo di esercizio i di strike dell'opzione, T tempo di maturità o di strike dell'opzione, r tasso nominale di interesse composto in modo continuo, ed infine il parametro σ, che è detto volatilità.

È importante sottolineare che, al contrario di tutti gli altri parametri, che sono noti e direttamente osservabili, il valore della volatilità non è direttamente osservabile, ma deve essere stimato. Un problema interessante riguarda proprio la stima statistica della volatilità.

Si osservi che fino ad ora abbiamo addirittura trovato una formula che permette di calcolare in modo approssimato tutti i tipi di opzioni plain vanilla di tipo europeo, con la condizione che la funzione f sia continua[8]

Per terminare la dimostrazione rimane solamente da calcolare esplicitamente il valore limite del prezzo della call europea.

A questo proposito notiamo che, per ogni t, la legge della variabile aleatoria $S_t^{(n)}$ rispetto a $\mathbb{P}^{(n)}$ è approssimativamente la stessa[9] della variabile aleatoria $s_0 \exp\{(r - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}Z\}$, dove Z è una variabile aleatoria gaussiana standard $N(0, 1)$.

Quindi, per $s_0 = x$, si tratta di calcolare

$$\begin{aligned} C_0(x) &= e^{-rT}\mathbf{E}\left[(S_T - K)^+\right] \\ &= e^{-rT}\mathbf{E}\left[\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}Z} - K\right)^+\right]. \end{aligned}$$

La speranza matematica a destra vale

$$e^{-rT}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z} - K\right)^+ e^{-z^2/2}dz.$$

L'integrando si annulla per $z \leq \zeta$, dove

$$\zeta = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\tfrac{K}{x}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right),$$

e quindi

$$C_0(x) = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\zeta}^{+\infty}\left(xe^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z} - K\right)e^{-z^2/2}dz.$$

Ricordando che per la funzione di distribuzione di una gaussiana standard si ha $\Phi(x) = \Phi(-x)$, si ottiene allora

$$\begin{aligned} C_0(x) &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\zeta}^{+\infty} e^{-rT}\,e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\sqrt{T}z}e^{-z^2/2}dz - \frac{K\,e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\zeta}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\zeta}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-\sigma\sqrt{T})^2}dz - Ke^{-rT}\Phi(-\zeta) \\ &= \frac{x}{\sqrt{2\pi}}\int_{\zeta-\sigma\sqrt{T}}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz - Ke^{-rT}\Phi(-\zeta) \\ &= x\Phi\left(-\zeta + \sigma\sqrt{T}\right) - Ke^{-rT}\Phi(-\zeta), \end{aligned}$$

[8] In realtà la condizione che f sia una funzione continua è superflua.

[9] L'uguaglianza in legge si vede dall'espressione approssimata del logaritmo del prezzo (1.20), e tenendo conto del fatto che la legge della variabile aleatoria $\widetilde{W}_t$ è $N(0, t)$ e che anche la variabile aleatoria $\sqrt{t}Z$ ha legge $N(0, t)$, se Z ha legge $N(0, 1)$. È importante sottolineare che ovviamente ciò vale solo come variabili aleatorie e non vale come processi (ossia il processo $(W_t)_{t\geq 0}$ non coincide affatto con il processo $(\sqrt{t}\,Z)_{t\geq 0}$: infatti le traiettorie tipiche del processo $(W_t)_{t\geq 0}$ non sono molto "regolari" ne' "prevedibili", e sono quindi molto diverse dalle traiettorie di $(\sqrt{t}\,Z)_{t\geq 0}$, che invece sono molto regolari e "prevedibili".

la così detta *formula di Black-Scholes* (1.10).

Mediante la formula di Black-Scholes, possiamo quindi ricavare il prezzo equo di un'opzione call europea. La formula di Black-Scholes ha il pregio di essere semplice e di dipendere da tre parametri: r, μ e σ. L'unico parametro difficile da stimare è la volatilità σ^2[10].

Va inoltre notato che poiché a tempo discreto vale l'interpretazione di $c_N(n,f) = c_{N-n}(0,f)$, analogamente si ottiene che, se entrassimo nel mercato al tempo t, e se il prezzo della azione sottostante al tempo t fosse noto ed uguale ad S_t, allora il prezzo della opzione, che indichiamo con C_t, sarebbe calcolato approssimativamente con la formula (1.10) in cui, però, al posto di s_0 andrebbe messo S_t e al posto di T andrebbe messo $T-t$:

$$C_t = S_t \left[\Phi\left(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\tfrac{x\, e^{r(T-t)}}{K}\right) + \tfrac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right) - \tfrac{K}{x\, e^{r(T-t)}}\, \Phi\big(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\tfrac{x\, e^{r(T-t)}}{K}\right) - \tfrac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\big)\right]\Big|_{x=S_t}.$$

Grazie alla formula di parità (si veda ad esempio il libro di S. Ross [3]), si ricava immediatamente anche il prezzo equo di una put europea P_t è dato da

$$P_t = C_t - S_t + Ke^{-r(T-t)},$$

sempre se si vuole comprare l'opzione al tempo t ed il prezzo della azione vale S_t.

Per ulteriori approfondimenti sai consiglia di consultare il libro di P. Baldi [1], o quello di D. Lamberton e B. Lapeyre [2], oppure di J.M. Steele [4] .

[10]La volatilità è un parametro che gioca un ruolo importante nelle applicazioni. Per questo motivo, negli ultimi anni, è stato molto studiato, in statistica, il problema di stimare il coefficiente di diffusione, a partire dall'osservazione di una traiettoria.

1.3 Il moto Browniano

1.3.1 Approssimazione del moto browniano per t fissato

Nella derivazione precedente del prezzo abbiamo incontrato il processo del logaritmo dei prezzi, che a parte il contributo dovuto al prezzo iniziale, si esprime come

$$\sum_{i=1}^{N_n(t)} \xi_i \log\left(\frac{u^{(n)}}{d^{(n)}}\right) + N_n(t) \log\left(d^{(n)}\right) = 2\sigma \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{N_n(t)} \xi_i - N_n(t)\,\sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e che si può ulteriormente riscrivere come

$$\sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{N_n(t)} (2\xi_i - 1)\right) = \sigma\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} (2\xi_i - 1)\right).$$

Si definisca

$$W_t^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} \left[(2\xi_i - 1) - \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[2\xi_i - 1]\right] \tag{1.23}$$

di modo che

$$\log\left(S_t^{(n)}\right) = \log\left(S_0\right) + \sigma W_t^{(n)} + \sigma\, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[2\xi_i - 1] \tag{1.24}$$

Con calcoli analoghi a quelli della sezione precedente, si può vedere che il valore atteso

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor} \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[2\xi_i - 1] = \frac{1}{\sqrt{n}} \lfloor nt\rfloor\, (2\tilde{p}^{(n)} - 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \lfloor nt\rfloor \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\, \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} + o\big(\tfrac{1}{\sqrt{n}}\big) - 1\right) \to_{n\to\infty} \frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\, t.$$

Ovviamente il processo $W_t^{(n)}$, vale zero all'istante iniziale, ovvero

$$W_0^{(n)} = 0,$$

ed inoltre

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\left[W_t^{(n)}\right] = 0.$$

Per $t > 0$, con gli stessi calcoli della sezione precedente, si può vedere che il processo $W_t^{(n)}$ converge (per n che tende all'infinito) alla legge gaussiana di valore atteso nullo e varianza che tende a t.

Osservazione 1.3. ** Se si vuole ottenere una dimostrazione più precisa della convergenza in distribuzione di $W_t^{(n)}$ a W_t, si può ripetere lo stesso tipo di dimostrazione che si usa per il Teorema Centrale del Limite: tenendo conto del fatto che, definite le variabili aleatorie*

$$X_j := 2\xi_j - 1 \quad \textit{ed} \quad \widetilde{X}_j^{(n)} := \frac{1}{\sqrt{n}}\left[X_j - \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[X_j]\right],$$

si può riscrivere (1.23) *come*

$$\begin{aligned} W_t^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} \left[X_j - \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[X_j]\right] \\ &= \sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} \frac{1}{\sqrt{n}}\left[X_j - \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[X_j]\right] = \sum_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} \widetilde{X}_j^{(n)} \end{aligned}$$

e quindi, dato che

$$\exp\{i\,u\,W_t^{(n)}\} = \prod_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} \exp\{i\,u\,\widetilde{X}_j^{(n)}\}$$

e che le variabili aleatorie $\widetilde{X}_j^{(n)}$, $j \geq 1$ *sono indipendenti, si ottiene che*

$$\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\big[\exp\{i\,u\,W_t^{(n)}\}\big] = \prod_{j=1}^{\lfloor nt\rfloor} \widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}\big[\exp\{i\,u\,\widetilde{X}_j^{(n)}\}\big]. \tag{1.25}$$

Le variabili aleatorie $\widetilde{X}_j^{(n)}$ *hanno media nulla e varianza*

$$\begin{aligned}\widetilde{Var}^{(n)}\big[\widetilde{X}_j^{(n)}\big] &= \widetilde{Var}^{(n)}\big[\frac{1}{\sqrt{n}}\,2\,\xi_j\big] = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\,2\right)^2 \tilde{p}^{(n)}(1-\tilde{p}^{(n)})\\ &= \frac{4}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\theta_n\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n}}\,\theta_n\right)\end{aligned}$$

dove $\theta_n = (r - \frac{1}{2}\,\sigma^2)/\sigma + o(1)$, *di modo che*

$$\widetilde{Var}^{(n)}\big[\widetilde{X}_j^{(n)}\big] = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}).$$

Per ottenere la convergenza in distribuzione non rimane che utilizzare tale fatto per ottenere l'espressione approssimata della funzione caratteristica di $\widetilde{X}_j^{(n)}$, *sostituire tale espressione in* (1.25), *e procedere esattamente come nella dimostrazione del teorema centrale del limite.*

*

1.3.2 Indipendenza ed omogeneità degli incrementi

Ancora, se si considerano i tempi $0 \leq t_1 < t_2$, allora l'incremento $W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}$ ha la stessa legge di $W_{t_2-t_1}^{(n)}$, in quanto $W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}$ è funzione deterministica delle variabili aleatorie ξ_j, per j tale che $t_j^{(n)} = j/k \in (t_1, t_2]$, e la stessa funzione determina nello stesso modo $W_{t_2-t_1}^{(n)}$ a partire dalle variabili aleatorie ξ_i, per i tale che $t_i^{(n)} = i/n \in (0, t_2 - t_1]$, e di conseguenza la distribuzione dell'incremento $W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}$ converge ad una distribuzione gaussiana di valore atteso 0 e varianza $t_2 - t_1$, * come si vede facilmente[11].*

Se invece si considerano i tempi $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m$ allora gli incrementi

$$W_{t_1}^{(n)} - W_0^{(n)}, \quad W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}, \quad \ldots \quad W_{t_m}^{(n)} - W_{t_{m-1}}^{(n)}$$

[11]* Infatti, utilizzando le stesse notazioni dell'Osservazione 1.3, si ha

$$W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)} = \sum_{j=\lfloor nt_1\rfloor+1}^{\lfloor nt_2\rfloor} \widetilde{X}_j^{(n)},$$

come si vede subito osservando

$$W_{t_2}^{(n)} = \sum_{j=1}^{\lfloor nt_2\rfloor} \widetilde{X}_j^{(n)} = \sum_{j=1}^{\lfloor nt_1\rfloor} \widetilde{X}_j^{(n)} + \sum_{j=\lfloor nt_1\rfloor+1}^{\lfloor nt_2\rfloor} \widetilde{X}_j^{(n)} = W_{t_1}^{(n)} + (W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}).$$

Questa scomposizione, insieme al fatto che $W_0^{(n)} = 0$ permette anche di vedere che $W_{t_1}^{(n)}\big(= W_{t_1}^{(n)} - W_0^{(n)} = W_{t_1}^{(n)} - 0\big)$ e $W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}$ sono indipendenti. L'indipendenza di questi incrementi permette di affermare che, oltre alla convergenza in distribuzione di $W_{t_1}^{(n)}$ ad una variabile aleatoria gaussiana di valore medio nullo e varianza t_1 e la convergenza di $W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}$ ad una variabile aleatoria gaussiana di valore medio nullo e varianza $t_2 - t_1$, si ha anche la convergenza congiunta di $\big(W_{t_1}^{(n)}, W_{t_2}^{(n)} - W_{t_1}^{(n)}\big)$ ad una variabile aleatoria bidimensionale gaussiana di valori medi nulli, indipendenti e di varianza rispettivamente t_1 e $t_2 - t_1$. Questo fatto implica anche la convergenza della distribuzione congiunta di $\big(W_{t_1}^{(n)}, W_{t_2}^{(n)}\big)$. Questa osservazione si estende facilmente al caso in cui si considerino le variabili aleatorie $\big(W_{t_1}^{(n)}, W_{t_2}^{(n)}, \cdots W_{t_m}^{(n)}\big)$, con $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_{m-1} < t_m$. *

sono funzioni deterministiche delle variabili aleatorie

$$\{\xi_{j_1}:\ \tfrac{j_1}{n}\in(0,t_1]\},\quad \{\xi_{j_2}:\ \tfrac{j_2}{n}\in(t_1,t_2]\}\quad \dots\quad \{\xi_{j_m}:\ \tfrac{j_m}{n}\in(t_{m-1},t_m]\}$$

che sono indipendenti, e di conseguenza anche gli incrementi di $W^{(n)}$ sono indipendenti. Come ulteriore conseguenza questa proprietà si mantiene al tendere di n all'infinito.

1.3.3 Definizione del moto browniano e del modello di Black e Scholes

Le osservazioni precedenti portano naturalmente alla seguente definizione del processo di Wiener standard o moto browniano.

Definizione 1.1 (moto browniano). *Si chiama moto browniano un processo W_t per $t\in\mathbb{R}^+$ un processo tale che*

1 $W_0=0$,

2 *se* $0\le t_1<t_2<\ldots<t_{m-1}<t_m$ *allora gli incrementi*

$$W_{t_1}-W_0,\quad W_{t_2}-W_{t_1},\quad \dots\quad W_{t_m}-W_{t_{m-1}}$$

sono indipendenti,

3 *se* $0\le t_1<t_2$ *ed* $s>0$ *allora gli incrementi*

$$W_{t_2}-W_{t_1}\quad e\quad W_{t_2+s}-W_{t_1+s}\sim N(0,t_2-t_1),$$

ovvero hanno la stessa distribuzione gaussiana di valore atteso 0 *e varianza* t_2-t_1*. In altre parole si dice anche che gli incrementi sono omogenei.*

Di solito oltre alle tre precedenti proprietà si aggiunge anche la proprietà che le traiettorie sono continue, ossia che per ogni ω la funzione $t\mapsto W_t(\omega)$ è una funzione continua.

Inoltre quanto abbiamo visto nella sezione precedente permette di dare una definizione di un processo S_t, che, alla luce di (1.24), si può interpretare come il limite, rispetto alle misure martingala equivalenti, dei processi

$$S_t^{(n)}=\exp\left\{\log\left(S_t^{(n)}\right)\right\}=S_0\,\exp\left\{\sigma W_t^{(n)}+\sigma\,\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{\lfloor nt\rfloor}\widetilde{\mathbb{E}}^{(n)}[2\xi_i-1]\right\},$$

da cui si definisce

$$S_t=S_0\,\exp\left\{\sigma W_t+\sigma\,\frac{r-\frac12\sigma^2}{\sigma}\,t\right\}=S_0\,\exp\left\{\sigma W_t+(r-\tfrac12\sigma^2)\,t\right\},$$

in un opportuno spazio di probabilità $(\Omega,\mathcal{F},\widetilde{\mathbb{P}})$, rispetto al quale il processo attualizzato dei prezzi, ossia

$$\widetilde{S}_t=\frac{S_t}{B_t}=\frac{S_t}{B_0\,e^{rt}}=\frac{S_0}{B_0}\,\exp\left\{\sigma W_t+-\tfrac12\sigma^2\,t\right\},$$

risulta una martingala. *

Osservazione 1.4 (Il modello di Black e Scholes). *In realtà il modello di Black e Scholes viene di solito presentato nel seguente modo. Si assume che nel mercato ci siano due titoli, uno non rischioso*

$$B_t:=B_0\,e^{rt},$$

ed uno rischioso

$$S_t=S_0\,\exp\left\{\mu\,t+\sigma\,\mathbb{W}_t-\tfrac12\sigma^2\,t\right\},$$

dove il processo stocastico $\mathbb{W}_t$ *è un moto browniano standard in uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Si dimostra che esiste una misura* $\widetilde{\mathbb{P}}$*, equivalente a* $\mathbb{P}$*, e sotto la quale il processo attualizzato si scrive come*

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_0\, e^{rt}} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left\{\sigma W_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2\, t\right\}, \tag{1.26}$$

e dove il processo W_t *è un moto browniano nello spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{F}, \widetilde{\mathbb{P}})$*. Non dimostriamo questo fatto, ma osserviamo solo che, essendo*

$$\widetilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t} = \frac{S_t}{B_0\, e^{rt}} = \frac{S_0}{B_0} \exp\left\{(\mu - r)\, t + \sigma\, \mathbb{W}_t - \tfrac{1}{2}\sigma^2\, t\right\}, \tag{1.27}$$

il processo W_t *deve necessariamente soddisfare*

$$\sigma W_t = (\mu - r)\, t + \sigma\, \mathbb{W}_t,$$

ovvero il processo W_t *deve essere necessariamente definito come*

$$W_t := \mathbb{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}\, t,$$

e quindi la misura di probabilità $\widetilde{\mathbb{P}}$ *deve essere necessariamente definita come la misura che rende il processo* $\mathbb{W}_t - \frac{\mu - r}{\sigma}\, t$ *un moto browniano.*

*

Bibliografia

[1] Baldi, P. *Equazione differenziali stocastiche e applicazioni*. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 28. Bologna: Pitagora Editrice. VIII, 309 p. (seconda edizione), 2000.

[2] Lamberton, D., and Lapeyre, B. *Introduction to stochastic calculus applied to finance*. Chapman & Hall, London, 1996. Translated from the 1991 French original by Nicolas Rabeau and François Mantion.

[3] Ross, S. M. *An introduction to mathematical finance*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Options and other topics.

[4] Steele, J. M. *Stochastic calculus and financial applications*, vol. 45 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2001.