PROVA D'ESAME - 20 marzo 2001 nome: ______________________

cognome: ______________________

SSIS-INDIRIZZO MATEMATICA E MATEMATICA APPLICATA (primo anno)

MATEMATICA APPLICATA B: CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

Per le domande a risposta aperta il punteggio varia da 0 a 3, mentre per le domande a risposta multipla il punteggio è: risposta esatta +3; mancata risposta 0; risposta sbagliata -1.

ESERCIZIO A

Al gioco del lotto scommettete puntando sull'ambo $\{1,2\}$ sulla ruota di Roma e sul terno $\{11,12,13\}$ sulla ruota di Napoli. Sia $q = \mathbb{P}\{\text{vincere entrambe le scommesse}\}$ e sia $p = \mathbb{P}\{\text{vincere almeno una delle due scommesse}\}$, allora:

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☒ $q = \Big((5\cdot 4\cdot 3)/(90\cdot 89\cdot 88)\Big)\Big((5\cdot 4)/(90\cdot 89)\Big)$

2. ☐ $q = \binom{5}{5}\binom{85}{0}/\binom{90}{5}$

3. ☐ $q = \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}) + \binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5} - [\binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}]\,[\binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}]$

4. ☐ $q = (5\cdot 4\cdot 3)/(90\cdot 89\cdot 88) + (5\cdot 4)/(90\cdot 89)$

COMMENTO:
L'evento $A =$"*ottenere l'ambo {1,2}sulla ruota di Roma*" e l'evento $B =$"*ottenere il terno {11,12,13}sulla ruota di Napoli*" sono **indipendenti** e quindi la probabilità di ottenere sia l'ambo {1,2} sulla ruota di Roma che il terno {11,12,13} sulla ruota di Napoli è $\boxed{Pr(A\cap B) = Pr(A)Pr(B)}$.

DOMANDA 2: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $p = (5\cdot 4\cdot 3)/(90\cdot 89\cdot 88) + (5\cdot 4)/(90\cdot 89)$

2. ☒ $p = (5\cdot 4\cdot 3)/(90\cdot 89\cdot 88) + (5\cdot 4)/(90\cdot 89) - \Big((5\cdot 4\cdot 3)/(90\cdot 89\cdot 88)\Big)\Big((5\cdot 4)/(90\cdot 89)\Big)$

3. ☐ $p = \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5} + \binom{2}{2}\binom{87}{3})/\binom{90}{5} - \binom{5}{5}\binom{85}{0})/\binom{90}{5}$

4. ☐ $p = 1 - \Big(1 - \binom{3}{3}\binom{87}{2}/\binom{90}{5}\Big)\Big(1 - \binom{2}{2}\binom{87}{3}/\binom{90}{5}\Big)$

COMMENTO:
Posti A e B come sopra, la probabilità di "*ottenere l'ambo {1,2} sulla ruota di Roma o di ottenere il terno {11,12,13} sulla ruota di Napoli*" si puo' calcolare con $\boxed{Pr(A\cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A\cap B)}$, tenendo presente che in questo caso $Pr(A\cap B) = Pr(A)Pr(B)$ (come in domanda 1).
Si può anche procedere considerando che $\boxed{Pr(A\cup B) = 1 - Pr(A^c\cap B^c)}$ e quindi in questo caso $\boxed{= 1 - Pr(A^c)Pr(B^c) = 1 - (1 - Pr(A))(1 - Pr(B))}$. Attenzione la risposta 4 non è esatta: lo sarebbe se al posto di $\binom{2}{2}$ ci fosse $\binom{3}{2}$

ESERCIZIO B

Si danno 5 carte da un mazzo ben mescolato di 52 carte (13 cuori, 13 quadri, 13 fiori, 13 picche). La probabilità p di doppia coppia servita, cioè di avere due coppie (ma non poker) è:

1. ☒ $p = \binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}/\binom{52}{5}$

2. ☐ $p = 13 \cdot 12 \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}/\binom{52}{5}$

3. ☐ $p = \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1}/\binom{52}{5}$

4. ☐ $p = 2 \cdot 13 \binom{4}{2}\binom{48}{3} / \binom{52}{5} - 13 \cdot 12 \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1} / \binom{52}{5}$

COMMENTO:

La probabilità di una coppia di Assi e di una coppia di Re è $\binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{44}{1} / \binom{52}{5}$ in quanto corrisponde all'estrazione SENZA REINSERIMENTO di 5 palline tra 52 di cui 4 bianche (i 4 Assi), 4 rosse (i 4 Re) e 44 verdi (le rimanenti), e lo stesso vale per ogni altro tipo di doppia coppia.
I tipi di doppia coppia sono in totale $\binom{13}{2}$ in quanto si tratta di scegliere 2 numeri distinti di carte tra i 13 possibili per le carte delle due doppie coppie e l'ordine non ha importanza.

ESERCIZIO C

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.
Successivamente, dall'urna scelta (SEMPRE LA STESSA) vengono estratte le palline ad una ad una SENZA REINSERIMENTO.

Siano $\begin{cases} U \text{ l'evento } \{\textit{viene scelta l'urna } 1\} \\ V \text{ l'evento } \{\textit{viene scelta l'urna } 2\}. \end{cases}$

Siano $\begin{cases} R_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina rossa}\} \\ B_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione } n\textit{-sima viene estratta una pallina bianca}\}. \end{cases}$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.
Sia T il numero di estrazioni necessarie per ottenere per la prima volta una pallina rossa.

DOMANDA 1: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7} = \frac{5}{21}$

2. ☒ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$

3. ☐ $Pr(B_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{1}{12}$

4. ☐ $Pr(B_1) = \frac{2}{8}$ $\qquad Pr(B_2) = \frac{2}{8}$

COMMENTO:

$Pr(B_1) = Pr(U)Pr(B_1|U) + Pr(V)Pr(B_1|V) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}$, inoltre $Pr(B_1) = Pr(B_2)$ in quanto $\begin{cases} Pr(B_2) = Pr(U)Pr(B_2|U) + Pr(V)Pr(B_2|V) \\ Pr(B_2|U) = Pr(B_1|U) \text{ e } Pr(B_2|V) = Pr(B_1|V) \end{cases}$

DOMANDA 2 : mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

$a)$	gli eventi $\{X_2 = 0\}$ e $\{T = 1\}$ sono indipendenti	v	v	f	f
$b)$	gli eventi {X_2=0} e {T=1} sono incompatibili	v	f	v	f
		1.☐	**2.**☐	**3.**☐	**4.**☒

COMMENTO:
Gli eventi $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$ e $\{T = 1\} = R_1$ sono disgiunti (ovvero incompatibili) e hanno probabilità positiva: quindi non possono essere indipendenti, in quanto in generale se $Pr(A) > 0$, $Pr(B) > 0$ e $A \cap B = \emptyset$ allora $0 = Pr(A \cap B) \neq Pr(A)Pr(B) > 0$.

DOMANDA 3: Sapendo che la prima pallina estratta è rossa, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1 è:

1. ☒ $\frac{3}{8}$ **2.** ☐ $\frac{2}{8}$ **3.** ☐ $\frac{1}{3}$ **4.** ☐ $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8}$

COMMENTO:
La soluzione è immediata con la formula di Bayes:

$$Pr(U|R_1) = \frac{Pr(U)Pr(R_1|U)}{Pr(U)Pr(R_1|U) + Pr(V)Pr(R_1|V)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{8}} = \frac{1 \cdot 6}{1 \cdot 6 + 2 \cdot 5} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

DOMANDA 4: Calcolare, **sapendo che** $X_2 = 0$, la probabilità che sia stata scelta l'urna 1. (indicare i passaggi effettuati, semplificare i calcoli effettuati)

COMMENTO:

Si osservi che $\{X_2 = 0\} = B_1 \cap B_2$, quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = Pr(U|B_1 \cap B_2) = \frac{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U)}{Pr(U)Pr(B_1 \cap B_2|U) + Pr(V)Pr(B_1 \cap B_2|V)}.$$

Condizionatamente all'evento U si ha $Pr(B_1 \cap B_2|U) = \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}$: essendo nota la composizione dell'urna (2 palline bianche e 6 rosse), si tratta della probabilità di ottenere due palline bianche da estrazioni SENZA REINSERIMENTO.

Analogamente se si condiziona all'evento V si ha $Pr(B_1 \cap B_2|V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}$: essendo la composizione dell'urna nota (3 palline bianche e 5 rosse) e le estrazioni SENZA REINSERIMENTO.

Quindi

$$Pr(U|X_2 = 0) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{1}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7}} = \frac{2}{2 + 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{1 + 3 \cdot 2} = \frac{1}{7}$$

ESERCIZIO D

Una prima urna contiene 6 palline rosse e 2 bianche. Una seconda urna contiene 5 palline rosse e 3 bianche. Si lancia un dado e si sceglie l'urna 1 se escono 5 o 6 e la seconda altrimenti.
Successivamente, si estrae una pallina dall'urna scelta, se ne osserva il colore e poi VIENE REINSERITA nell'urna.
Si ripete l'operazione una seconda volta, cioè si lancia di nuovo il dado e si sceglie un'urna etc., poi l'operazione viene ripetuta una terza volta e così via.

$$\text{Siano} \begin{cases} U_n \text{ gli eventi } \{\textit{viene scelta l'urna 1 per l'estrazione n-sima}\} \\ V_n \text{ gli eventi } \{\textit{viene scelta l'urna 2 per l'estrazione n-sima}\}. \end{cases}$$

$$\text{Siano} \begin{cases} R_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione n-sima viene estratta una pallina rossa}\} \\ B_n \text{ gli eventi } \{\textit{all'estrazione n-sima viene estratta una pallina bianca}\}. \end{cases}$$

Sia X_m il numero di palline rosse estratte nelle prime m estrazioni.
Sia T il numero di estrazioni necessarie per ottenere per la prima volta una pallina rossa.

DOMANDA 1: mettere una croce sulla colonna relativa alle risposte giuste (v=VERO f=FALSO)

$a)$	$Pr(R_1 \cap R_2 \vert U_1) = Pr(R_1 \vert U_1) Pr(R_2 \vert U_1)$	v	v	f	f
$b)$	$Pr(R_1 \cap R_2) = Pr(R_1) Pr(R_2)$	v	f	v	f
		1.☒	**2.**☐	**3.**☐	**4.**☐

COMMENTO:

Ogni operazione si svolge con le stesse modalità ed in modo indipendente dalle altre: il dado viene rilanciato ogni volta e, all'inizio dell'operazione successiva, le composizioni delle due urne sono sempre le stesse.
In particolare oltre a $b)$ vale il fatto che gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli e

$Pr(R_1) = 1 - Pr(B_1)$ e $Pr(B_1)$ si puo' calcolare come nell'esercizio C, da cui $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ (per quanto riguarda la prima estrazione le due situazioni dell'esercizio C e D sono identiche)

DOMANDA 2: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☐ $Pr(X_3 = k) = \binom{3}{k} (\frac{1}{3})^k \cdot (\frac{2}{3})^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

2. ☒ $Pr(X_3 = k) = (\binom{3}{k}) (\frac{2}{3})^k \cdot (\frac{1}{3})^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

3. ☐ $Pr(X_3 = k) = \frac{1}{3} \cdot \binom{3}{k} (\frac{6}{8})^k \cdot (\frac{2}{8})^{3-k} + \frac{2}{3} \cdot \binom{3}{k} (\frac{5}{8})^k \cdot (\frac{3}{8})^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

4. ☐ $Pr(X_3 = k) = \frac{2}{3} \cdot \binom{3}{k} (\frac{6}{8})^k \cdot (\frac{2}{8})^{3-k} + \frac{1}{3} \cdot \binom{3}{k} (\frac{5}{8})^k \cdot (\frac{3}{8})^{3-k} \qquad k = 0, 1, 2, 3$

COMMENTO:

La soluzione dipende da quanto osservato nel Commento precedente:
gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli con $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ e X_3 conta il numero di

successi su 3 prove (successo=estrazione di pallina rossa), quindi X segue la legge Binomiale $B(3, \frac{2}{3})$.

DOMANDA 3: mettere una croce sulla affermazione esatta

1. ☒ $Pr(T = k) = (\frac{1}{3})^{k-1} \cdot \frac{2}{3}, \quad k = 1, 2, \cdots$

2. ☐ $Pr(T = k) = (\frac{2}{3})^{k-1} \cdot \frac{1}{3}, \quad k = 1, 2, \cdots$

3. ☐ $Pr(T = k) = \frac{1}{3} \cdot (\frac{6}{8})^{k-1} \cdot \frac{2}{8} + \frac{2}{3} \cdot (\frac{5}{8})^{k-1} \cdot \frac{3}{8}, \quad k = 1, 2, \cdots$

4. ☐ $Pr(T = k) = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{8} \cdot (\frac{2}{8})^{k-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} \cdot (\frac{3}{8})^{k-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$

COMMENTO:

Di nuovo: gli eventi R_n formano uno schema di Bernoulli con $Pr(R_1) = \frac{2}{3}$ e T è il tempo di primo successo, quindi è una variabile aleatoria Geometrica di paramentro $p = \frac{2}{3}$.