1 Il processo di Poisson come limite della passeggiata aleatoria riscalata

1.1 Passeggiata aleatoria riscalata

L'idea è la seguente: si consideri una successione di eventi $A_k^{(n)}$ che rappresentano gli esiti di prove indipendenti, di probabilità $\mathbb{P}(A_k^{(n)}) = p^{(n)} = \frac{\lambda}{n}$. Si denoti, come è usuale,

$$S_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{1}_{A_k^{(n)}}$$

la passeggiata aleatoria corrispondente, ovvero la variabile aleatoria che conta il numero di successi nelle prime n prove.

Si supponga che ogni prova venga effettuata ad intervalli di ampiezza $\frac{1}{n}$. In questo modo per ogni $t \in [0, \infty)$, il numero di prove effettuate nell'intervallo $[0, t]$ è la parte intera inferiore[1] di nt, cioè $\lfloor nt \rfloor$. Di conseguenza il numero di successi nell'intervallo $[0, t]$ è la variabile aleatoria $S_h^{(n)}$, con $h = \lfloor nt \rfloor$, o meglio

$$N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}.$$

1.2 Legge limite

Come primo problema ci interessa trovare la legge di $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$ e quale è il suo limite.

È chiaro che $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$ segue una legge binomiale $Bin(\lfloor nt \rfloor, p^{(n)})$, per $t > 0$ ed è $N^{(n)}(0) = 0$ per $t = 0$.

Tenendo presente che

$$p^{(n)} = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda t}{nt} \frac{\lfloor nt \rfloor}{\lfloor nt \rfloor} = \frac{\lambda t}{\lfloor nt \rfloor} \frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}, \qquad \text{per } t > 0$$

e che $\frac{\lfloor nt \rfloor}{nt}$ converge ad 1 per n che tende ad infinito[2], si intuisce che la legge limite deve essere una legge di Poisson di parametro λt.

Per dimostrarlo formalmente si consideri la funzione caratteristica di $N^{(n)}(t) = S_{\lfloor nt \rfloor}^{(n)}$

$$\varphi_N^{(n)}(t)(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuN^{(n)}(t)}] = \Big(p^{(n)}\mathrm{e}^{iu} + (1 - p^{(n)})\Big)^{\lfloor nt \rfloor} = \left(\frac{\lambda}{n}\mathrm{e}^{iu} + (1 - \frac{\lambda}{n})\right)^{n\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}},$$

da cui, poiché $\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$ converge a t per $n \to \infty$, si vede facilmente che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_N^{(n)}(t)(u) = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{\lambda(\mathrm{e}^{iu} - 1)}{n}\right)^n\right]^{\frac{\lfloor nt \rfloor}{n}} = \exp\{\lambda t(\mathrm{e}^{iu} - 1)\}.$$

La dimostrazione[3] è quindi ottenuta, ricordando che una variabile aleatoria N di Poisson, con parametro μ ammette come funzione caratteristica

$$\varphi_N(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuN}] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{iuk} \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{e}^{iu}\mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \exp\{\mu(\mathrm{e}^{iu} - 1)\}.$$

[1] Si ricordi che, per ogni numero reale a, $\lfloor a \rfloor = h$ se e solo se $h \le a < h + 1$

[2] Più in generale infatti $\frac{\lfloor a \rfloor}{a}$ converge ad 1 per a che tende ad infinito: $|\frac{\lfloor a \rfloor}{a} - 1| = |\frac{\lfloor a \rfloor - a}{a}| \le \frac{1}{a} \to 0$

[3] La precedente dimostrazione, con piccole modifiche, si ripete per dimostrare con le funzioni caratteristiche il Teorema di approssimazione di Poisson, cioè che la legge $Bin(n, \frac{\mu}{n})$ converge ad una legge di Poisson di parametro μ.

1.3 Indipendenza degli incrementi

Si osservi che, per ogni n, se si considera un intervallo $(t_1, t_2]$, il numero di successi nell'intervallo $(t_1, t_2]$ coincide con $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$.

La variabile aleatoria $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ si chiama anche incremento di $N^{(n)}(t)$ nell'intervallo $(t_1, t_2]$.

La sua distribuzione è binomiale di parametri $\lfloor nt_2 \rfloor - \lfloor nt_1 \rfloor$ e in modo analogo si dimostra che $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ converge in legge ad una variabile di Poisson di parametro $\lambda(t_2 - t_1)$.

Si osservi anche che se si considerano due intervalli disgiunti $(0, t_1]$ e $(t_1, t_2]$, allora il numero di successi nell'intervallo $(0, t_1]$, cioè $N^{(n)}(t_1)$, ed il numero di successi nell'intervallo $(t_1, t_2]$, cioè $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$, sono variabili aleatorie indipendenti, in quanto dipendono da eventi indipendenti[4].

La precedente proprietà si generalizza al caso di più intervalli ovvero, per intervalli disgiunti $(0, t_1]$, $(t_1, t_2]$, $\ldots$, $(t_{m-1}, t_m]$, gli incrementi negli intervalli $(t_{i-1}, t_i]$, cioè le variabili aleatorie $M_i = N^{(n)}(t_i) - N^{(n)}(t_{i-1})$, per $i = 1, \ldots, m$, sono variabili aleatorie indipendenti.

1.4 Tempo di primo successo e sua legge limite

Si consideri ora la variabile aleatoria $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$ dove $X^{(n)}$ è il tempo di primo successo nelle prove di Bernoulli $A_k^{(n)}$, per $k \geq 1$, e quindi è una variabile aleatoria geometrica di parametro $\frac{\lambda}{n}$.

Si dimostra facilmente che $T^{(n)}$ converge in legge (cioè in distribuzione) ad una variabile aleatoria esponenziale di parametro λ.

Infatti, se X è una variabile aleatoria geometrica di parametro p, allora la sua funzione caratteristica è

$$\begin{aligned}
\varphi_X(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuX}] &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{iuk}(1-p)^{k-1}p \\
&= \mathrm{e}^{iu}p \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{iu(k-1)}(1-p)^{k-1} = \mathrm{e}^{iu}p \sum_{k=1}^{\infty} [\mathrm{e}^{iu}(1-p)]^{k-1} \\
&= \mathrm{e}^{iu} \frac{p}{1 - \mathrm{e}^{iu}(1-p)}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}
\varphi_T^{(n)}(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuT^{(n)}}] &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iu\frac{X^{(n)}}{n}}] = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}X^{(n)}] = \varphi_X(\frac{u}{n}) \\
&= \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} \frac{\lambda}{n\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}(1 - \frac{\lambda}{n})\right)}.
\end{aligned}$$

Poiché $\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}$ converge ad 1 per $n \to \infty$, e più precisamente $\mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} = 1 + i\frac{u}{n} + O(\frac{1}{n^2})$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_T^{(n)}(u) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n\left(1 - \mathrm{e}^{i\frac{u}{n}}(1 - \frac{\lambda}{n})\right)} \\
&= 1 \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{n\left(1 - \left(1 + i\frac{u}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right)(1 - \frac{\lambda}{n})\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda}{\left(-iu - nO(\frac{1}{n^2}) + \lambda + iu\frac{\lambda}{n} + \lambda O(\frac{1}{n^2})\right)} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - iu}.
\end{aligned}$$

[4] Vale infatti: $N^{(n)}(t_1)$ dipende dagli eventi $A_k^{(n)}$, per $k \leq \lfloor nt_1 \rfloor$, mentre $N^{(n)}(t_2) - N^{(n)}(t_1)$ dipende dagli eventi $A_k^{(n)}$, per $\lfloor nt_1 \rfloor < k \leq \lfloor nt_2 \rfloor$

La convergenza è quindi provata tenendo conto che per una variabile aleatoria $Z \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$

$$\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ}] = \frac{\lambda}{\lambda - iu}.$$

Ciò e deriva da un fatto più generale: la legge $\mathrm{EXP}(\lambda) = \Gamma(1, \lambda)$ e per una $Z \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ si ha

$$\varphi_Z(u) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^{\alpha}.$$

Infatti

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(u) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{iuZ}] &= \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{iux} \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\lambda x} dx \\
&= \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda - iu)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\lambda - iu)^{\alpha} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - iu)x} dx \\
&= \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda - iu)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} (\lambda x - iux)^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-(\lambda - iu)x} d(\lambda - iu)x \\
&= \frac{\lambda^{\alpha}}{(\lambda - iu)^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{r(t,\lambda)} z^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-z} dz \\
&\qquad \text{(l'integrale è esteso alla semiretta } r(t, \lambda) = \{z = \lambda x - iux, \text{ per } x > 0\} \\
&\qquad \text{ e vale } \Gamma(\alpha)\text{, come si può ottenere dal Teorema dei residui)} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - iu}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

La convergenza in legge di $T^{(n)} = \frac{X^{(n)}}{n}$ ad una variabile esponenziale $Z \sim \mathrm{EXP}(\lambda)$ si può dimostrare anche direttamente:

$$\lim_{n \to \infty} F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x),$$

in questo caso la convergenza deve valere per ogni x in quanto $F_Z(x)$ è una funzione continua:

$$\begin{cases} F_Z(x) = 0 & \text{per } x < 0, \\ F_Z(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{per } x \geq 0. \end{cases}$$

Per $x < 0$ si ha $F_{T^{(n)}}(x) = F_Z(x) = 0$, e lo stesso vale per $x = 0$, mentre per $x > 0$ è equivalente dimostrare che

$$\lim_{n \to \infty} 1 - F_{T^{(n)}}(x) = 1 - F_Z(x) = \mathrm{e}^{-\lambda x}.$$

Si osservi che, per $x > 0$

$$\begin{aligned}
1 - F_{T^{(n)}}(x) = \mathbb{P}(T^{(n)} > x) = \mathbb{P}(\frac{X^{(n)}}{n} > x) &= \mathbb{P}(X^{(n)} > nx) = \mathbb{P}(X^{(n)} > \lfloor nx \rfloor) \\
= (1 - p(n))^{\lfloor nx \rfloor} = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor} &= \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}} = \mathrm{e}^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$