

**N.B.** Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti. Non è necessario svolgere tutti i calcoli fino in fondo.

**Esercizio 1.**  $D_1$  è un dado omogeneo a sei facce, mentre  $D_2$  è un dado, anch'esso a sei facce, ma calibrato in modo tale che la probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi  $1, 2, 3$  è uguale a  $\theta$  mentre probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi  $4, 5, 6$  è uguale a  $2\theta$ .

*i)* Quanto deve valere  $\theta$ ?

*ii)* Si lancia  $D_1$  due volte di seguito. Calcolare la probabilità di ottenere (nell'ordine) i punteggi  $2$  e  $4$ . Ripetere il calcolo sostituendo il dado  $D_1$  con  $D_2$ .

Supponiamo che, in un gioco da tavolo fra Emilio e Franca,  $D_1$  e  $D_2$  vengano distribuiti a caso fra i due giocatori.

*iii)* Calcolare la probabilità che Emilio ottenga il punteggio  $2$  al primo lancio.

*iv)* Calcolare la probabilità condizionata che ad Emilio sia toccato  $D_2$ , dato che ha ottenuto il punteggio  $2$  al primo lancio.

*v)* Sapendo che Emilio ha ottenuto il punteggio  $2$  al primo lancio, calcolare la probabilità che Emilio ottenga  $4$  al secondo lancio.

**Esercizio 2.** Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

*i)* Se la maestra prepara un compito di geometria non commutativa scegliendo a caso 4 esercizi, tra quelli del sussidiario (ovviamente di geometria non commutativa), con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi?

Si supponga invece che la maestra prepari un compito riassuntivo scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

*ii)* Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (N.B. compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi NON sono considerati diversi)

*iii)* Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?

*iv)* Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

**Esercizio 3.** Pierino ha l'indomani il compito in classe di matematica. È noto che il compito consiste di 10 esercizi, ogni esercizio svolto correttamente vale un punto, mentre un esercizio sbagliato, anche in parte, vale zero punti. Pierino non è molto bravo in matematica ed ha probabilità del 20% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio.

- i)* Calcolare la probabilità che Pierino prenda almeno la sufficienza, ossia svolga correttamente almeno sei esercizi.

Guidobaldo, il compagno di banco di Pierino, è il migliore della classe ed ha probabilità del 80% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio. Pierino pensa allora di copiare i primi nove esercizi da Guidobaldo e svolgere da solo l'ultimo esercizio.

- ii)* Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, almeno otto esercizi.

Se Pierino prende otto o più la maestra si insospettisce e decide che Pierino ha copiato. Pierino considera pertanto la seguente strategia. Per ogni esercizio, uno indipendentemente dall'altro, Pierino copia da Guidobaldo con probabilità  $p \in [0, 1]$ , mentre lo fa da solo con probabilità  $1 - p$ .

- iii)* Calcolare, in funzione del parametro  $p$ , la probabilità  $q(p)$  che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, l'esercizio numero 1.
- iv)* Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, sei o sette esercizi.
- v)* (**FACOLTATIVO**) Sapendo che Pierino ha seguito la strategia precedente e che ha svolto correttamente sei esercizi, calcolare la probabilità che abbia copiato da Guidobaldo tutti i dieci esercizi.