Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. L. Bertini - G. Nappo - F. Spizzichino

Esonero del 12.04.2010 - SOLUZIONI

Esercizio 1. D_1 è un dado omogeneo a sei facce, mentre D_2 è un dado, anch'esso a sei facce, ma calibrato in modo tale che la probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi *1, 2, 3* è uguale a θ mentre probabilità di ottenere ciascuno dei punteggi *4, 5, 6* è uguale a 2θ.

i) Quanto deve valere θ?

ii) Si lancia D_1 due volte di seguito. Calcolare la probabilità di ottenere (nell'ordine) i punteggi *2* e *4*. Ripetere il calcolo sostituendo il dado D_1 con D_2.

Supponiamo che, in un gioco da tavolo fra Emilio e Franca, D_1 e D_2 vengano distribuiti a caso fra i due giocatori.

iii) Calcolare la probabilità che Emilio ottenga il punteggio *2* al primo lancio.

iv) Calcolare la probabilità condizionata che ad Emilio sia toccato D_2, dato che ha ottenuto il punteggio *2* al primo lancio.

v) Sapendo che Emilio ha ottenuto il punteggio *2* al primo lancio, calcolare la probabilità che Emilio ottenga *4* al secondo lancio.

SOLUZIONE Esercizio 1.

i) **RISPOSTA** $\theta = 1/9$.

SOLUZIONE Infatti, posto p_i la probabilità che esca il numero i, per $i = 1, \dots, 6$, sappiamo che $p_1 = p_2 = p_3 = \theta$ e che $p_5 = p_4 = p_6 = 2\,\theta$. Poiché $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$, cioè $3\theta + 6\,\theta = 1$ si ottiene $9\,\theta = 1$, ossia $\theta = 1/9$.

ii) **RISPOSTA** Se il dado lanciato è D_1, la probabilità di ottenere in due lanci 2 e 4, nell'ordine è

$$\alpha_1 = 1/36,$$

mentre se il dado lanciato è D_2, la probabilità di ottenere in due lanci 2 e 4, nell'ordine è

$$\alpha_2 = 2/81.$$

SOLUZIONE Nel caso del lancio del dado D_1, possiamo considerare i due lanci come due prove indipendenti (condizionatamente a conoscere il dado) e ciascuna di probabilità 1/6, per cui $\alpha_1 = \frac{1}{6}\frac{1}{6} = 1/36$. Analogamente si ha, se si è lanciato due volte il dado D_2, si possono considerare i due lanci come due prove indipendenti e quindi $\alpha_2 = \theta\, 2\,\theta = 2\,\theta^2 = \frac{2}{81}$.

iii) **RISPOSTA** La probabilità cercata vale 5/36.

SOLUZIONE Poiché i dadi vengono distribuiti a caso, e denotando con E_i l'evento Emilio ha avuto il dado D_i, possiamo considerare $P(E_i) = 1/2$, per $i = 1, 2$. Inoltre, posto X_1 il numero ottenuto al primo lancio e X_2 il numero ottenuto al secondo lancio, se Emilio ha avuto il dado D_1 si ha chiaramente

$$P(X_1 = i|E_1) = 1/6, \quad \text{per } i = 1, \dots, 6,$$

mentre, se Emilio ha avuto il dado D_2, si ha

$$P(X_1 = j|E_2) = p_j = 1/9 \quad \text{per } j = 1, 2, 3, \qquad P(X_1 = j|E_2) = p_j = 2/9 \quad \text{per } j = 4, 5, 6.$$

Di conseguenza

$$P(X_1 = 2) = P(E_1)P(X_1 = 2|E_1) + P(E_2)P(X_1 = 2|E_2) = \frac{1}{2}\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\frac{1}{9} = \frac{3+2}{36} = \frac{5}{36}$$

iv) **RISPOSTA** Si chiede $P(E_2|X_1=2)$ e si ottiene $P(E_2|X_1=2)=2/5$.

SOLUZIONE Per la formula di Bayes si ha

$$\begin{aligned} P(E_2|X_1=2) &= \frac{P(E_2)P(X_1=2|E_2)}{P(X_1=2)} = \frac{P(E_2)P(X_1=2|E_2)}{P(E_1)P(X_1=2|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{9}}{\frac{1}{2}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

v) **RISPOSTA** Si chiede $P(X_2=4|X_1=2)$ e si ottiene $P(X_2=4|X_1=2)=\frac{17}{90}$.

SOLUZIONE Infatti, tenendo conto che gli eventi $\{X_1=2\}$ e $\{X_2=4\}$ sono due eventi condizionatamente indipendenti, rispetto alla partizione formata dagli eventi E_1 ed E_2, si ha

$$\begin{aligned} P(X_2=4|X_1=2) &= \frac{P(X_2=4\cap X_1=2)}{P(X_1=2)} \\ &= \frac{P(E_1)P(X_1=2|E_1)P(X_2=4|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)P(X_2=4|E_2)}{P(E_1)P(X_1=2|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{6}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{9}\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{6}\frac{1}{6}+\frac{1}{9}\frac{2}{9}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{\frac{1}{4\cdot 9}+\frac{2}{9^2}}{\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{9+8}{6\cdot 9+4\cdot 9} = \frac{17}{90} \end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE, considerando che gli eventi $\{X_1=2\}$ e $\{X_2=4\}$ sono condizionatamente indipendenti dalla partizione E_1 ed E_2 si può calcolare

$$\begin{aligned} P(X_2=4|X_1=2) &= P(E_1|X_1=2)\,P(X_2=4|E_1)+P(E_2|X_1=2)\,P(X_2=4|E_2) \\ &= \big(1-P(E_2|X_1=2)\big)\,P(X_2=4|E_1)+P(E_2|X_1=2)\,P(X_2=4|E_2) \end{aligned}$$

e quindi, tenendo conto del risultato del precedente punto (*iv*), si ha

$$P(X_2=4|X_1=2) = \frac{3}{5}\frac{1}{6}+\frac{2}{5}\frac{2}{9} = \frac{9+8}{90} = \frac{17}{90}.$$

Per comodità del lettore riportiamo la dimostrazione della formula

$$P(X_2=4|X_1=2) = P(E_1|X_1=2)\,P(X_2=4|E_1)+P(E_2|X_1=2)\,P(X_2=4|E_2)$$

utilizzata nel calcolo precedente:

$$\begin{aligned} P(X_2=4|X_1=2) &= \frac{P(X_2=4\cap X_1=2)}{P(X_1=2)} \\ &= \frac{P(E_1)P(X_1=2|E_1)P(X_2=4|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)P(X_2=4|E_2)}{P(E_1)P(X_1=2|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)} \\ &= \frac{P(E_1)P(X_1=2|E_1)}{P(E_1)P(X_1=2|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)}\;P(X_2=4|E_1) \\ &+ \frac{P(E_2)P(X_1=2|E_2)}{P(E_1)P(X_1=2|E_1)+P(E_2)P(X_1=2|E_2)}\;P(X_2=4|E_2) \\ &= P(E_1|X_1=2)\,P(X_2=4|E_1)+P(E_2|X_1=2)\,P(X_2=4|E_2) \end{aligned}$$

Esercizio 2. Carletto deve fare il compito in classe di matematica. Nel sussidiario ci sono 50 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 30 di geometria non commutativa e 10 di statistica bayesiana. Carletto non sa assolutamente nulla di tali materie, impara quindi a memoria 20 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 10 di geometria non commutativa e 5 di statistica bayesiana. Al momento del compito, Carletto svolge solo gli esercizi che ha imparato a memoria.

i) Se la maestra prepara un compito di geometria non commutativa scegliendo a caso 4 esercizi, tra quelli del sussidiario (ovviamente di geometria non commutativa), con quale probabilità Carletto riesce a svolgere tutti gli esercizi?

Si supponga invece che la maestra prepari un compito riassuntivo scegliendo a caso, tra gli esercizi del sussidiario, 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 4 esercizi di geometria non commutativa e 1 esercizio di statistica bayesiana.

ii) Quanti compiti diversi può preparare la maestra? (N.B. compiti che differiscono solo per l'ordine degli esercizi NON sono considerati diversi)

iii) Con quale probabilità Carletto svolge tutti i 10 esercizi?

iv) Con quale probabilità Carletto svolge 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana?

SOLUZIONE Esercizio 2.

i) **RISPOSTA** $\frac{\binom{10}{4}\binom{20}{0}}{\binom{30}{4}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}$

SOLUZIONE si tratta chiaramente di probabilità ipergeometriche e quindi la probabilità vale

$$\frac{\binom{10}{4}\binom{20}{0}}{\binom{30}{4}} = \frac{\frac{10!}{4!6!}\cdot 1}{\frac{30!}{4!26!}} = \frac{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4!}}{\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}\left(= \frac{2}{9\cdot 29} = \frac{2}{261}\right)$$

ALTERNATIVAMENTE (anche tenendo conto dell'ordine)
casi possibili: la maestra sceglie tra i 30 compiti di geometria non commutativa 4 esercizi (chiaramente sono tutti distinti) i compiti possibili sono $30\cdot 29\cdot 28\cdot 27$
casi possibili: gli esercizi (sempre tutti distinti) devono essere scelti fra i dieci che Carletto conosce a memoria e quindi i compiti ai quali Carletto sa rispondere a tutti e quattro i quesiti sono $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7$. La probabilità cercata vale quindi $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}$.
ANCORA ALTERNATIVAMENTE
posto E_i, Carletto risolve l'esercizio i, per $i = 1, 2, 3, 4$, si sta chiedendo

$$P(E_1\cap E_2\cap E_3\cap E_4) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_2\cap E_1)P(E_4|E_1\cap E_2\cap E_3) = \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28}\cdot\frac{7}{27}.$$

INFINE, ALTERNATIVAMENTE, anche se non molto naturale, si può procedere come se "si sapesse quali sono i quattro esercizi di Geometria scelti dalla maestra", per cui la probabilità cercata va calcolata considerando che Carletto deve scegliere 10 esercizi tra i 30 di geometria non commutativa prendendone 4 tra i 4 scelti dalla maestra e 6 tra quelli non scelti dalla maestra, ossia

$$\frac{\binom{4}{4}\binom{26}{6}}{\binom{30}{10}} = \frac{\frac{26!}{6!\,20!}}{\frac{30!}{10!\,20!}} = \frac{26!}{30!}\,\frac{10!}{6!} = \frac{1}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}\,10\cdot 9\cdot 8\cdot 7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}$$

ii) **RISPOSTA** I modi di scegliere i compiti sono $\binom{50}{5}\binom{30}{4}\binom{10}{1} = \frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 10}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1}$

SOLUZIONE I modi di scegliere 5 esercizi di equazioni ellittiche semilineari tra i 50 del libro (senza tenere conto dell'ordine) sono $\binom{50}{5}$, quelli di scegliere 4 esercizi di geometria non commutativa (senza tenere conto dell'ordine) sono $\binom{30}{4}$ e infine quelli di scegliere 1 esercizio di statistica bayesiana tra i 10 del libro sono $10 = \binom{10}{1}$. Quindi i compiti possibili sono

$$\binom{50}{5}\binom{30}{4}\binom{10}{1}$$

iii) **RISPOSTA** La probabilità che Carletto risolva tutti i 10 esercizi è

$$\frac{\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{0}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{20}{0}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{50}{5}\cdot\binom{30}{4}\cdot\binom{10}{1}} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\ \cdot\ 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\ \cdot\ 5}{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\ \cdot\ 30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\ \cdot\ 10}$$

SOLUZIONE I casi possibili sono stati già calcolati nel punto *(ii)*. Per calcolare i casi favorevoli si consideri innanzi tutto che ci sono 6 tipi di esercizi:
20 esercizi di tipo E, cioè di equazioni ellittiche semilineari che Carletto sa risolvere
30 esercizi di di tipo F, ossia di equazioni ellittiche semilineari che Carletto non sa risolvere,
10 esercizi di tipo G, ossia di geometria non commutativa che Carletto sa risolvere,
20 di tipo H, ossia di geometria non commutativa che Carletto non sa risolvere,
5 esercizi di tipo I, ossia di statistica bayesiana che Carletto sa risolvere,
e infine
5 di tipo L, ossia di statistica bayesiana che Carletto non sa risolvere.
I casi favorevoli corrispondono alle estrazioni (senza reinserimento) di 5 tra i 20 di tipo E, 0 tra i 30 di tipo F, 4 tra i 10 di tipo G, 0 tra i 20 di tipo H, 1 tra i 5 di tipo I e 0 tra i 5 di tipo L, e sono quindi

$$\binom{20}{5}\cdot\binom{30}{0}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{20}{0}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{0} = \binom{20}{5}\cdot\binom{10}{4}\cdot\binom{5}{1}$$

iv) **RISPOSTA** La probabilità che Carletto risolva 3 esercizi di equazioni ellittiche semilineari, 2 di geometria non commutativa e 1 di statistica bayesiana è

$$\frac{\binom{20}{3}\cdot\binom{30}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{20}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{0}}{\binom{50}{5}\cdot\binom{30}{4}\cdot\binom{10}{1}} = \frac{\frac{20\cdot 19\cdot 18}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{30\cdot 29}{2\cdot 1}\cdot\frac{10\cdot 9}{2\cdot 1}\cdot\frac{20\cdot 19}{2\cdot 1}\cdot 5}{\frac{50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 10}$$
$$= \binom{5}{3}\frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{18}{48}\frac{30}{47}\frac{29}{46}\binom{4}{2}\frac{10}{30}\frac{9}{29}\frac{20}{28}\frac{19}{27}\frac{5}{10}$$

SOLUZIONE I casi favorevoli corrispondono alle estrazioni (senza reinserimento) di 3 tra i 20 di tipo E, 2 tra i 30 di tipo F, 2 tra i 10 di tipo G, 2 tra i 20 di tipo H, 1 tra i 5 di tipo I e 0 tra i 5 di tipo L, e sono quindi

$$\binom{20}{3}\cdot\binom{30}{2}\cdot\binom{10}{2}\cdot\binom{20}{2}\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{5}{0}$$

ALTERNATIVAMENTE si può pensare che gli eventi relativi a materie diverse siano indipendenti fra loro e che per calcolare le probabilità relative a ciascuna materia si possa usare l'ipergeometrica.

ANCORA ALTERNATIVAMENTE, per quanto riguarda gli esercizi di Equazioni ellittiche si può procedere come segue: la probabiltà che Carletto risolva i primi tre esercizi e non gli ultimi due è

$$\frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{18}{48}\frac{30}{47}\frac{29}{46},$$

e, per ognuno dei $\binom{5}{3}$ modi in cui si possono fissare quali siano i 3 esercizi risolti e i 2 non risolti [fra i 5 esercizi di Equazioni ellittiche], la probabilità rimane la stessa per cui la probabilità che Carletto risolva (esattamente) 3 esercizi tra i 5 di equazioni ellittiche è

$$\binom{5}{3}\frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{18}{48}\frac{30}{47}\frac{29}{46}.$$

Procedendo in modo analogo per gli esercizi di geometria e di statistica e tenendo conto che eventi che riguardano materie diverse sono indipendenti, si perviene alla risposta direttamente nella forma

$$\binom{5}{3}\frac{20}{50}\frac{19}{49}\frac{18}{48}\frac{30}{47}\frac{29}{46}\binom{4}{2}\frac{10}{30}\frac{9}{29}\frac{20}{28}\frac{19}{27}\frac{5}{10}$$

COME ULTIMA ALTERNATIVA: la probabilità cercata si può calcolare anche considerando gli esercizi scelti da Carletto come se "si sapesse" quali sono i 5 esercizi di Equazioni ellittiche semilineari, i 4 esercizi di Geometria non commutativa e quello di Statistica bayesiana, scelti dalla maestra, in modo che si debba calcolare la probabilità che Carletto per gli esercizi di Equazioni ellittiche ne impari 3 tra i cinque di scelti dala maestra e 17 tra il 45 non scelti, per gli esercizi di Geometria non commutativa Pierino ne impari 2 tra i 4 scelti e 8 tra i 26 non scelti, e infine per gli esercizi di Statistica bayesiana Pierino impari quello scelto e 4 tra i 9 non scelti dalla maestra, ossia la probabilità si può calcolare

$$
\begin{aligned}
\frac{\binom{5}{3}\binom{45}{17}}{\binom{50}{20}} \frac{\binom{4}{2}\binom{26}{18}}{\binom{30}{10}} \frac{\binom{1}{1}\binom{9}{4}}{\binom{10}{5}} &= \binom{5}{3} \frac{\frac{45!}{17!\,28!}}{\frac{50!}{20!\,30!}} \binom{4}{2} \frac{\frac{26!}{8!\,18!}}{\frac{30!}{10!\,20!}} \, 1 \, \frac{\frac{9!}{4!\,5!}}{\frac{10!}{5!\,5!}} \\
&= \binom{5}{3} \frac{45!}{50!} \frac{20!}{17!} \frac{30!}{28!} \frac{10!}{8!} \frac{20!}{18!} \binom{4}{2} \frac{30!}{26!} \frac{9!}{10!} \frac{5!}{4!} \\
&= \binom{5}{3} \frac{20}{50} \frac{19}{49} \frac{18}{48} \frac{30}{47} \frac{29}{46} \binom{4}{2} \frac{10}{30} \frac{9}{29} \frac{20}{28} \frac{19}{27} \, \frac{5}{10}
\end{aligned}
$$

Nell'ultima riga ritroviamo una delle espressioni precedenti della probabilità cercata.

Esercizio 3. Pierino ha l'indomani il compito in classe di matematica. È noto che il compito consiste di 10 esercizi, ogni esercizio svolto correttamente vale un punto, mentre un esercizio sbagliato, anche in parte, vale zero punti. Pierino non è molto bravo in matematica ed ha probabilità del 20% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio.

i) Calcolare la probabilità che Pierino prenda almeno la sufficienza, ossia svolga correttamente almeno sei esercizi.

Guidobaldo, il compagno di banco di Pierino, è il migliore della classe ed ha probabilità del 80% di svolgere correttamente, l'uno indipendentemente dall'altro, ogni esercizio. Pierino pensa allora di copiare i primi nove esercizi da Guidobaldo e svolgere da solo l'ultimo esercizio.

ii) Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, almeno otto esercizi.

Se Pierino prende otto o più la maestra si insospettisce e decide che Pierino ha copiato. Pierino considera pertanto la seguente strategia. Per ogni esercizio, uno indipendentemente dall'altro, Pierino copia da Guidobaldo con probabilità $p \in [0, 1]$, mentre lo fa da solo con probabilità $1 - p$.

iii) Calcolare, in funzione del parametro p, la probabilità $q(p)$ che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, l'esercizio numero 1.

iv) Calcolare la probabilità che Pierino svolga correttamente, seguendo la strategia precedente, sei o sette esercizi.

v) (**FACOLTATIVO**) Sapendo che Pierino ha seguito la strategia precedente e che ha svolto correttamente sei esercizi, calcolare la probabilità che abbia copiato da Guidobaldo tutti i dieci esercizi.

SOLUZIONE Esercizio 3.

i) **RISPOSTA** La probabilità cercata è

$$\sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$

SOLUZIONE Si tratta di uno schema di Bernoulli o delle prove ripetute con numero delle prove $n = 10$ e probabilità di successo $\theta = 20/100 = 1/5$ e si chiede la probabilità che il numero di successi sia maggiore o uguale a 6. Ricordiamo che, in uno schema di Bernoulli, se X denota il numero di successi allora $P(X = k) = \binom{n}{k}\theta^k(1-\theta)^{n-k}$. Nel nostro caso successo significa problema risolto e X denota il numero di problemi risolti, e quindi

$$P(X \geq 6) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}$$

ii) **RISPOSTA** La probabilità cercata vale

$$\binom{9}{7}\left(\frac{4}{5}\right)^7\left(\frac{1}{5}\right)^2\frac{1}{5} + \binom{9}{8}\left(\frac{4}{5}\right)^8\left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{9}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^9\left(\frac{1}{5}\right)^0$$

SOLUZIONE Indicando con G_k l'evento Guidobaldo risolve (esattamente) k tra i primi nove esercizi e con E l'evento Pierino risolve l'esercizio numero 10, l'evento "Pierino svolge correttamente almeno otto esercizi" consiste in

$$(G_7 \cap E) \cup G_8 \cup G_9,$$

in quanto se Guidobaldo risolve correttamente 8 o 9 esercizi [tra i primi nove] allora sicuramente Pierino ne svolge correttamente almeno 8 (sia che risolva bene l'esercizio 10 o no), mentre se Guidobaldo ne risolve correttamente 7, allora Pierino deve risolvere correttamente il decimo per ottenere il punteggio di 8 [infine se Guidobaldo ne risolve correttamente solo 6 o meno di 6 Pierino non potrà ottenere un punteggio maggiore o uguale a 8]

Tenendo conto che gli eventi G_k sono disgiunti a due a due e che Pierino risolve il problema 10 indipendentemente da Guidobaldo, si ha

$$P\big((G_7 \cap E) \cup G_8 \cup G_9\big) = P\big((G_7 \cap E)\big) + P(G_8) + P(G_9) = P(G_7)P(E) + P(G_8) + P(G_9)$$

Dal testo sappiamo che $P(E) = 1/5$, e che per calcolare $P(G_k)$ si possono usare le probabilità binomiali con 9 prove ripetute di probabilità $8/10 = 4/5$, per cui

$$P(G_k) = \binom{9}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{9-k}.$$

Riassumendo la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned}
&\binom{9}{7} \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + \binom{9}{8} \left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)^1 + \binom{9}{9} \left(\frac{4}{5}\right)^9 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left[\frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{1}{5} + 9\frac{4}{5}\frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2\right] \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left[9 \cdot 4 + 9 \cdot 4 \cdot 5 + 4^2 \cdot 5\right] = \left(\frac{4}{5}\right)^7 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot 4\left[9 + 9 \cdot 5 + 4 \cdot 5\right] \\
&= \left(\frac{4}{5}\right)^8 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 74
\end{aligned}$$

ALTERNATIVAMENTE:
Posto Y il numero di esercizi giusti svolti nel compito di Pierino con questo metodo si ha

$$P(Y \geq 8) = P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10)$$

Inoltre, utilizzando le notazioni precedenti,

$$\{Y = 8\} = (G_7 \cap E) \cup (G_8 \cap E^c)$$

$$\{Y = 9\} = (G_8 \cap E) \cup (G_9 \cap E^c)$$

$$\{Y = 10\} = G_9 \cap E$$

e quindi

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 8) &= P(Y = 8) + P(Y = 9) + P(Y = 10) \\
&= P(G_7)P(E) + P(G_8)P(E^c) + P(G_8)P(E) + P(G_9)P(E^c) + P(G_9)P(E) \\
&= P(G_7)P(E) + P(G_8)\big(P(E^c) + P(E)\big) + P(G_9)\big(P(E^c) + P(E)\big) \\
&= P(G_7)P(E) + P(G_8) + P(G_9)
\end{aligned}$$

ANCORA ALTERNATIVAMENTE: sempre utilizzando le stesse notazioni e ponendo $\widetilde{S}_G$ il numero di esercizi risolti tra i primi 9 da Guidobaldo, si ha

$$\begin{aligned}
P(Y \geq 8) &= P(Y \geq 8|E)P(E) + P(Y \geq 8|E^c)P(E^c) = P(\widetilde{S}_G \geq 7)P(E) + P(\widetilde{S}_G \geq 8)P(E^c) \\
&= \left[\binom{9}{7} \left(\tfrac{4}{5}\right)^7 \left(\tfrac{1}{5}\right)^2 + \binom{9}{8} \left(\tfrac{4}{5}\right)^8 \left(\tfrac{1}{5}\right)^1 + \binom{9}{9} \left(\tfrac{4}{5}\right)^9 \left(\tfrac{1}{5}\right)^0\right] \frac{4}{5} \\
&+ \left[\binom{9}{8} \left(\tfrac{4}{5}\right)^8 \left(\tfrac{1}{5}\right)^1 + \binom{9}{9} \left(\tfrac{4}{5}\right)^9 \left(\tfrac{1}{5}\right)^0\right] \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

in quanto le probabilità $P(\widetilde{S}_G = k) = \binom{9}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^k \left(\frac{1}{5}\right)^{9-k}$

iii) **RISPOSTA** La probabilità cercata è

$$q(p) = p\frac{8}{10} + (1-p)\frac{2}{10} = p\frac{4}{5} + (1-p)\frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}\,p$$

SOLUZIONE Si pongano:Guidobaldo risolve bene l'esercizio numero 1,
B l'evento Pierino risolve (da solo) bene l'esercizio numero 1,
C l'evento Pierino scrive sul compito la risposta giusta,
H l'evento Pierino copia l'esercizio numero 1 da Guidobaldo.
Utilizzando la formula delle probabilità totali si ottiene che

$$\begin{aligned} q(p) = P(C) &= P(H)P(C|H) + P(H^c)P(C|H^c) = pP(A) + (1-p)P(B) = p\frac{8}{10} + (1-p)\frac{2}{10} \\ &= p\frac{4}{5} + (1-p)\frac{1}{5} = \frac{3}{5}\,p + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

iv) **RISPOSTA** La probabilità cercata è

$$\begin{aligned} &\binom{10}{6}\big(q(p)\big)^6\big(1-q(p)\big)^4 + \binom{10}{7}\big(q(p)\big)^7\big(1-q(p)\big)^3 \\ &= \binom{10}{6}\big(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\,p\big)^6\big(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,p\big)^4 + \binom{10}{7}\big(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\,p\big)^7\big(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\,p\big)^3 \end{aligned}$$

SOLUZIONE Poiché per ogni esercizio Pierino ripete sempre la stessa procedura, anche in questo caso si tratta di uno schema di Bernoulli o delle prove ripetute con $n = 10$ prove e probabilità di successo $q(p)$ (calcolata al punto *(ii)* precedente). Quindi per calcolare la probabilità cercata dobbiamo sommare le due probabilità di avere esattamente 6 successi su 10 prove e di avere 7 successi su 10 prove: Posto S_P il numero degli esercizi svolti correttamente nel compito di Pierino sappiamo che possiamo calcolarle tramite le probabilità binomiali

$$P(S_P = k) = \binom{10}{k}\big(q(p)\big)^k\big(1-q(p)\big)^{10-k}$$

e la probabilità cercata vale

$$\begin{aligned} P(S_P = 6) + P(S_P = 7) &= \binom{10}{6}\big(q(p)\big)^6\big(1-q(p)\big)^4 + \binom{10}{7}\big(q(p)\big)^7\big(1-q(p)\big)^3 \\ = \binom{10}{6}\big(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\,p\big)^6\big(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}\,p\big)^4 &+ \binom{10}{7}\big(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\,p\big)^7\big(\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\,p\big)^3 \end{aligned}$$

v) **RISPOSTA** La probabilità cercata è la probabilità condizionata $\frac{4^6\,p^{10}}{\big(1+3p\big)^6\big(4-3p\big)^4}$.

SOLUZIONE Posto, come nel punto precedente, S_P il numero degli esercizi svolti correttamente nel compito di Pierino, e posto S_G il numero degli esercizi risolti correttamente da Guidobaldo, sappiamo che possiamo usare le probabilità binomiali e ottenere che

$$P(S_P = k) = \binom{10}{k}\big(q(p)\big)^k\big(1-q(p)\big)^{10-k}$$

$$P(S_G = k) = \binom{10}{k}\big(\frac{4}{5}\big)^k\big(\frac{1}{5}\big)^{10-k}.$$

Poiché è noto che Pierino sceglie a caso ogni volta se copiare o no da Guidobaldo, l'evento F che Pierino copi tutte e 10 le volte è indipendente dagli eventi del tipo $S_G = k$ e la probabilità dell'evento F (cioè che Pierino copi tutte e 10 le volte) è p^{10}, si ha che la probabilità cercata è data da

$$P(F|\{S_P = 6\}) = \frac{P(\{S_P = 6\} \cap F)}{P(S_P = 6)} = \frac{P(\{S_G = 6\} \cap F)}{P(S_P = 6)}$$

in quanto l'evento $\{S_P = 6\} \cap F = \{S_G = 6\} \cap F$ in quanto se Pierino ha copiato da Guidobaldo tutti gli esercizi, allora $S_P = 6$ se e solo se $S_G = 6$. Tenendo poi conto dell'indipendenza degli eventi F e $S_G = 6$ si ottiene

$$\begin{aligned} P(F|\{S_P = 6\}) = \frac{P(\{S_G = 6\})P(F)}{P(S_P = 6)} &= \frac{\binom{10}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^4 p^{10}}{\binom{10}{6}\big(q(p)\big)^6\big(1-q(p)\big)^4} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^4 p^{10}}{\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{5}p\right)^6\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{5}p\right)^4} = \frac{4^6\, p^{10}}{\left(1+3p\right)^6\left(4-3p\right)^4} \end{aligned}$$