Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Compito scritto del 21.06.2010 - FOGLIO RISPOSTE

NOME e COGNOME____

CANALE: G. Nappo **VOTO:** ____________

N.B. Scrivere le risposte dei vari punti degli esercizi
oppure, in mancanza di tempo e/o di spazio, mettere una croce sui punti risolti degli esercizi.

Esercizio 1.

i) ☐ __________

ii) ☐ __________

iii) ☐ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

Esercizio 2.

i) ☐ __________

ii) ☐ __________

iii) ☐ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

Esercizio 3.

i) ☐ __________

ii) ☐ __________

iii) ☐ __________

iv) ☐ __________

v) ☐ __________

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – Compito scritto del 21.06.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
ATTENZIONE: Svolgere tutti i calcoli fino in fondo, SOLO se avete tempo.

NOME e COGNOME____

Esercizio 1. Il giuoco del *poker* consiste in una scelta casuale di 5 carte da un mazzo di 52 carte (diviso in 4 semi con 13 carte per seme).

i) Supponendo di scegliere le 5 carte contemporaneamente (ovvero non si distingue l'ordine), calcolare il numero di possibili scelte. Se invece si distinguesse l'ordine quante sarebbero?

ii) Calcolare la probabilità di avere *poker d'assi* (tra le 5 carte scelte ci sono i 4 assi).

iii) Calcolare la probabilità che le 5 carte scelte siano tutte dello stesso seme.

iv) Calcolare la probabilità di avere *scala reale*, ovvero le 5 carte scelte sono tutte dello stesso seme e sono una delle successioni $1, 2, 3, 4, 5$; $2, 3, 4, 5, 6$; $\dots$; $9, 10, 11, 12, 13$; $10, 11, 12, 13, 1$.

v) Sapendo che le 5 carte scelte sono tutte delle stesso seme, calcolare la probabilità di avere *scala reale*.

Soluzione Esercizio 1.

i) Il numero delle possibili scelte, senza tenere conto dell'ordine è

$$\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{13 \cdot 2^2 \cdot 17 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 7^2 \cdot 2^4 \cdot 3}{5 \cdot 3 \cdot 2^3} = 17 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^4$$

mentre il numero delle possibili scelte, tenendo conto dell'ordine è

$$\frac{52!}{47!} = 52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48.$$

ii) La probabilità di avere poker d'assi è

$$p_{ii} = \frac{\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{1 \cdot 48}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{\frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{13}\,\frac{1}{17}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{7^2}$$

in quanto si può dividere il mazzo in 4 "assi" e 48 carte "non assi".
Alternativamente si può calcolare questa probabilità considerando che la probabilità di poker equivale alla probabilità di

$$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$$

dove $A_i =$"*l'i-sima carta scelta è un asso*" e quindi

$$p_{ii} = 5\,\frac{4}{52}\,\frac{3}{51}\,\frac{2}{50}\,\frac{1}{49}\,\frac{48}{48} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = \frac{1}{13}\,\frac{1}{17}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{7^2}$$

iii) La probabilità che siano tutte dello stesso seme vale

$$p_{iii} = 4\,\frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}} = 4\,\frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48} = \frac{11 \cdot 3}{17 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 2^2},$$

infatti ci sono 4 semi possibili e quindi posto $G =$"*tutte e cinque le carte dello stesso seme*", e posto $G_c =$"*tutte e cinque le carte di cuori*", $G_q =$"*tutte e cinque le carte di quadri*", $G_f =$"*tutte e cinque le carte di fiori*" $G_p =$"*tutte e cinque le carte di picche*", si ha $G = G_c \cup G_q \cup G_f \cup G_p$ e inoltre per $\ell = c, q, f, p$, si ha

$$P(G_\ell) = \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}},$$

iv) La probabilità di scala reale vale

$$p_{iv} = 4 \cdot 10 \frac{1}{\binom{52}{5}} = \frac{2^3 \cdot 5}{17 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2^4} = \frac{1}{17 \cdot 13 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 2}$$

infatti bisogna considerare che ci sono 40 tipi di scale reali (10 per ogni seme, per 4 semi) e che fissata una scala reale (fissati i numeri e il seme la probabilità che le carte scelte formino quella scala reale è $1/\binom{52}{5}$.

v) La probabilità condizionata di scala reale sapendo di avere tutte le carte dello stesso seme vale

$$p_v = \frac{p_{iv}}{p_{iii}} = \frac{4 \cdot 10 \frac{1}{\binom{52}{5}}}{4 \frac{\binom{13}{5}\binom{39}{0}}{\binom{52}{5}}} = \frac{10}{\binom{13}{5}} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 2}{13 \cdot 11 \cdot 3^2}$$

in quanto la probabilità di avere scala reale e tutte le carte dello stesso seme coincide con la probabilità di avere scala reale.

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – COMPITO SCRITTO DEL 21.06.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.

NOME e COGNOME____

Esercizio 2. Una parete artificiale per l'arrampicata sportiva è composta da $\boldsymbol{m}$ settori di difficoltà crescente. Un arrampicatore ha probabilità $\boldsymbol{p \in (0,1)}$ di superare il primo settore. Inoltre, se supera il $(k-1)$-simo settore, con $2 \le k \le m$, ha probabilità $\boldsymbol{p^k}$ di superare il settore successivo (ovviamente, se non ha superato il $(k-1)$-simo settore, non ha superato nemmeno il k-simo).
(IN ALTERNATIVA: invece di $\boldsymbol{m}$ generico e $\boldsymbol{p \in (0,1)}$, si consideri $\boldsymbol{m = 3}$ e $\boldsymbol{p = 2/3}$)

i) Si dimostri, per induzione su $k = 1, 2, \ldots, m$, che la probabilità che l'arrampicatore superi il k-simo settore è $p^{k(k+1)/2}$. **(IN ALTERNATIVA: si calcoli per $k = 1, 2, 3$ la probabilità che l'arrampicatore superi il k-simo settore).**

ii) Calcolare la probabilità che l'arrampicatore cada nel k-simo settore, cioè che superi il settore $(k-1)$-simo ma non il k-simo.

iii) Sapendo che l'arrampicatore non ha superato l'intera parete, calcolare la probabilità che sia caduto nel k-simo settore.

Si consideri ora il caso di una parete con $m = 3$ settori e $p = 2/3$. L'arrampicatore esegue n tentativi di scalata. Assumendo indipendenza tra i diversi tentativi, si denoti con Z_n il numero di volte che l'arrampicatore completa la parete senza cadere.

iv) Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per $\mathbb{P}\Big(Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\Big)$.

v) Si determinino dei valori di n per cui la precedente probabilità è almeno $9/10$.

Soluzione Esercizio 2.

i) Si ponga $E_k =$"*l'arrampicatore supera il settore* k", allora si ha, come dato del problema

$$P(E_1) = p = p^{1(1+1)/2}$$

Quindi la formula $P(E_k) = p^{k(k+1)/2}$ è valida per $k = 1$, inoltre, per ogni k tra 2 ed m si ha

$$P(E_k) = P(E_{k-1})P(E_k|E_{k-1}) + P(E_{k-1}^c)P(E_k|E_{k-1}^c) = P(E_{k-1})P(E_k|E_{k-1}) + P(E_{k-1}^c)\, 0$$

e quindi utilizzando la fomrula induttiva si ha

$$P(E_k) = P(E_{k-1})P(E_k|E_{k-1}) = p^{(k-1)k/2}\, p^k = p^{(k-1)k/2+k} = p^{k(k+1)/2}.$$

Alternativamente si può anche osservare che, per la formula delle probabilità composte,

$$\begin{aligned} P(E_k) &= P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_k) = P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_2 \cap E_1) \cdots P(E_k|E_{k-1} \cap E_{k-2} \cap \cdots \cap E_1) \\ &= P(E_1)P(E_2|E_1)P(E_3|E_2) \cdots P(E_k|E_{k-1}) = p\, p^2\, p^3\, \cdots\, p^k = p^{\sum_{i=1}^k i} = p^{k(k+1)/2}. \end{aligned}$$

ii) La probabilità che l'arrampicatore superi il settore $k-1$ ma non il settore k vale

$$P(E_{k-1} \cap E_k^c) = P(E_{k-1})P(E_k^c|E_{k-1}) = p^{(k-1)k/2}(1 - p^k).$$

Alternativamente, considerando che $E_k \subseteq E_{k-1}$

$$P(E_{k-1} \setminus E_k) = P(E_{k-1}) - P(E_k) = p^{(k-1)k/2} - p^{k(k+1)/2} = p^{(k-1)k/2}(1 - p^k).$$

iii) Si chiede di calcolare, per $k \le m$

$$P(E_{k-1} \cap E_k^c | E_m^c) = \frac{P(E_{k-1} \cap E_k^c \cap E_n^c)}{P(E_m^c)} = \frac{P(E_{k-1} \cap E_k^c)}{P(E_m^c)} = \frac{p^{(k-1)k/2}(1-p^k)}{1-p^{m(m+1)/2}}$$

Alternativamente, ma in modo meno efficiente si può calcolare la probabilità di non superare l'intera parete come segue

$$\begin{aligned}P(E_m^c) &= P(E_1^c) + P(E_1 \cap E_2^c) + \cdots + P(E_{m-2} \cap E_{m-1}^c) + P(E_{m-1} \cap E_m^c) \\ &= 1 - p + (p - p^3) + (p^3 - p^6) + \cdots + (p^{(m-2)(m-1)/2} - p^{(m-1)m/2} + (p^{(m-1)m/2} - p^{m(m+1)/2} \\ &= 1 - p^{m(m+1)/2}.\end{aligned}$$

iv) La variabile aleatoria Z_n è una variabile aleatoria binomiale di paramentri n e $\alpha = p^{m(m+1)/2} = (2/3)^6$ e quindi $E(Z_n) = n(2/3)^6$ e $Var(Z_n) = n(2/3)^6\big(1-(2/3)^6\big)$. Inoltre

$$\big\{Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\big\} \supseteq \big\{|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| < \frac{n}{10}\big\}$$

e quindi

$$P\big(Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\big) \ge P\big(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| < \frac{n}{10}\big) = 1 - P\big(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \ge \frac{n}{10}\big).$$

Per la disuguaglianza di Chebyshev si ha

$$P\big(|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \ge \frac{n}{10}\big) \le \frac{Var(Z_n)}{\big(\frac{n}{10}\big)^2} = \frac{n\alpha(1-\alpha)100}{n^2} = \frac{\alpha(1-\alpha)100}{n}$$

da cui, ricordando che $\alpha = (2/3)^6 (\simeq 0.0878)$

$$P\big(Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\big) \ge 1 - \frac{(2/3)^6(1-(2/3)^6)100}{n}.$$

v) Affinché $P\big(Z_n > \mathbb{E}(Z_n) - \frac{n}{10}\big) \ge 9/10$ è quindi sufficiente che

$$1 - \frac{(2/3)^6(1-(2/3)^6)100}{n} \ge 9/10 \qquad \Leftrightarrow \qquad 1/10 \ge \frac{(2/3)^6(1-(2/3)^6)100}{n}$$

cioè

$$n \ge (2/3)^6(1-(2/3)^6)1000.$$

(Solo per curiosità: essendo $(2/3)^6(1-(2/3)^6)1000 \simeq 0.0878(1-0.0878)1000 = 80.083..$, basta prendere $n \ge 81$.)

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

Prof. G. Nappo – Compito scritto del 21.06.2011

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi su questi fogli **giustificando** brevemente i passaggi svolti.
I calcoli vanno svolti fino in fondo.

NOME e COGNOME____

Esercizio 3.

Siano X ed Y variabili aleatorie con la seguente densità discreta congiunta

$Y \backslash X$	**−1**	**0**	**1**
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$
3	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

i) Calcolare la densità discreta marginale di X, e calcolare la densità discreta marginale di Y.

ii) Dimostrare che X e Y NON sono variabili indipendenti.

iii) Dimostrare che il valore atteso e la varianza di $|XY|$ valgono: $E[|XY|] = \frac{8}{9}$ e $Var(|XY|) = \frac{98}{81}$.

iv) Calcolare la densità discreta di $Z = |XY|$

v) Calcolare la densità discreta di X condizionata a $Z = 0$.

Soluzione Esercizio 3.

i) La densità discreta di X è data da $p_X(i) = 1/3$ per $i \in \{-1, 0, +1\} = Im(X)$ e la densità discreta di Y è data da, $Im(Y) = \{0, 1, 2, 3\}$ e $p_Y(0) = p_Y(1) = p_Y(3) = 2/9$ e $p_Y(2) = 3/9$, infatti

$$P(X=-1) = P(X=-1, Y=0) + P(X=-1, Y=1) + P(X=-1, Y=2) + P(X=-1, Y=3) = 1/9 + 1/9 + 1/9 + 0 = 1/3,$$
$$P(X=\ 0) = P(X=0, Y=0) + P(X=0, Y=1) + P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3) = 0 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 1/3,$$
$$P(X=\ 1) = P(X=1, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=1, Y=2) + P(X=1, Y=3) = 1/9 + 0 + 1/9 + 1/9 = 1/3,$$

e

$$P(Y=0) = P(X=-1, Y=0) + P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=0) = 1/9 + 0 + 1/9 = 2/9,$$
$$P(Y=1) = P(X=-1, Y=1) + P(X=0, Y=1) + P(X=1, Y=1) = 1/9 + 1/9 + 0 = 2/9,$$
$$P(Y=2) = P(X=-1, Y=2) + P(X=0, Y=2) + P(X=1, Y=2) = 1/9 + 0 + 1/9 + 1/9 = 3/9,$$
$$P(Y=3) = P(X=-1, Y=3) + P(X=0, Y=3) + P(X=1, Y=3) = 0 + 1/9 + 1/9 = 2/9,$$

Alternativamente, sommando sulle colonne della tabella per ottenere $p_X(k)$ e sulle righe per ottenere $p_Y(h)$

$Y \backslash X$	**−1**	**0**	**1**	$p_Y(h)$
0	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	2/9
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	2/9
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	3/9
3	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	2/9
$p_X(k)$	1/3	1/3	1/3	1

ii) Basta trovare una coppia (i, j) per cui $P(X = i, Y = j) \neq P(X = i)P(Y = j)$, ad esempio $i = j = 0$ per la quale $0 = P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0) > 0\big(= (1/3)(2/9)\big)$

iii) Per calcolare il valore atteso di $|XY|$ e la sua varianza non è necessario trovare la densità discreta di $Z = |XY|$, infatti si ha

$$\begin{aligned}E(|XY|) &= \sum_{i\in\{-1,0,1\}} \sum_{i\in\{0,1,2,3\}} |i \cdot j| P(X = i, Y = j)\\ &= 1P(X = -1, Y = 1) + 2P(X = -1, Y = 2) + 2P(X = 1, Y = 1) + 3P(X = 1, Y = 3) = 8/9.\end{aligned}$$

Inoltre, tenendo conto che $Var(|XY|) = E(|XY|^2) - \big(E(|XY|)\big)^2$, e che

$$\begin{aligned}E(|XY|^2) &= \sum_{i\in\{-1,0,1\}} \sum_{i\in\{0,1,2,3\}} |i \cdot j|^2 P(X = i, Y = j)\\ &= 1P(X = -1, Y = 1) + 2^2P(X = -1, Y = 2) + 2^2P(X = 1, Y = 1) + 3^2P(X = 1, Y = 3)\\ &= (1 + 4 + 4 + 9)/9 = 2,\end{aligned}$$

si ha subito

$$Var(|XY|) = E(|XY|^2) - \big(E(|XY|)\big)^2 = 2 - \big(8/9\big)^2 = (162 - 64)/81 = 98/81$$

Alternativamente si può trovare prima la densità discreta di Z e poi calcolare valore atteso e varianza di Z.

iv) Per trovare la densità discreta di $Z = |XY|$ basta osservare che

$$\begin{aligned}&P(Z = 1) = P(X = -1, Y = 1) + P(X = +1, Y = 1) = 1/9 + 0 = 1/9\\ &P(Z = 2) = P(X = -1, Y = 2) + P(X = +1, Y = 2) = 1/9 + 1/9 = 2/9\\ &P(Z = 3) = P(X = -1, Y = 3) + P(X = +1, Y = 3) = 0 + 1/9 = 1/9\\ &P(Z = 0) = 1 - P(Z = 1) - P(Z = 2) - P(Z = 3) = 5/9\end{aligned}$$

Alternativamente

$$\begin{aligned}P(Z = 0) = &P(X = 0, Y = 0) + P(X = 0, Y = 1) + P(X = 0, Y = 2) + P(X = 0, Y = 3)\\ &+ P(X = -1, Y = 0) + P(X = 1, Y = 0) = 0 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 + 1/9 = 5/9\end{aligned}$$

Ancora alternativamente si può scrivere in ciascuna casella della tavola a fianco il valore della variabile Z e poi sommare le probabilità relative ai valori assunti.

$Y \backslash X$	**−1**	**0**	**1**
0	$\frac{1}{9}$ $\boxed{0}$	0 $\boxed{0}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{0}$
1	$\frac{1}{9}$ $\boxed{1}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{0}$	0 $\boxed{1}$
2	$\frac{1}{9}$ $\boxed{2}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{0}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{2}$
3	0 $\boxed{3}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{0}$	$\frac{1}{9}$ $\boxed{3}$

v) Per ottenere la densità discreta di X condizionata a $Z = 0$ dobbiamo calcolare

$$P(X = i|Z = 0) = \frac{P(X = i,\ Z = 0)}{P(Z = 0)}, \quad i = -1, 0, 1.$$

e si ottiene facilmente che

$$\begin{aligned}P(X = -1|Z = 0) &= \frac{P(X = -1,\ Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{P(X = -1,\ Y = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{1/9}{5/9} = 1/5\\ P(X = +1|Z = 0) &= \frac{P(X = +1,\ Z = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{P(X = +1,\ Y = 0)}{P(Z = 0)} = \frac{1/9}{5/9} = 1/5\end{aligned}$$

e di conseguenza

$$P(X=0|Z=0) = 1 - P(X=-1|Z=0) - P(X=+1|Z=0) = 1 - (1/5) - (1/5) = 3/5$$

alternativamente

$$\begin{aligned}
P(X=0|Z=0) &= \frac{P(X=0,\, Z=0)}{P(Z=0)} \\
&= \frac{P(X=0,\, Y=0) + P(X=0,\, Y=1) + P(X=0,\, Y=2) + P(X=0,\, Y=3)}{P(Z=0)} \\
&= \frac{0 + 1/9 + 1/9 + 1/9}{5/9} = 3/5
\end{aligned}$$