Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESONERO DEL 10.06.2011, Canale I-Z (G. Nappo)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 1. Un dado equo viene lanciato finché non esce 5 o 6. Sia T il numero totale di lanci effettuati e X il risultato del dado nell'ultimo lancio effettuato.

i) Calcolare $\mathbb{P}(T = 3, X = 5)$.

ii) Calcolare la distribuzione di T.

iii) Calcolare la distribuzione di X.

iv) Calcolare la distribuzione congiunta di T e X e dire se sono variabili aleatorie indipendenti.

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESONERO DEL 10.06.2011, Canale I-Z (G. Nappo)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ______________________________

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 2. Una moneta truccata con probabilità di testa data da $p \in (0,1)$ viene lanciata n volte, $n \geq 2$. Sia Y_n il numero delle coppie di teste consecutive, ad esempio se $n = 10$ e i risultati sono $CTTTCCTTCT$ allora Y_n vale 3.

i) Trovare la distribuzione di Y_3 e calcolare il suo valore il suo valore atteso.

Per $i = 1, \dots, n-1$, si definiscano gli eventi A_i=$\{$*esce testa sia all'i-mo che all'*$i+1$*-mo lancio*$\}$.

ii) Calcolare $\mathbb{P}(A_i)$, $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+1})$ e $\mathbb{P}(A_i \cap A_{i+2})$.

iii) Calcolare il valore atteso di Y_n, $n \geq 2$.

iv) Calcolare la varianza di Y_n, $n \geq 2$.

v) Utilizzando la diseguaglianza di Chebyshev, trovare una limitazione inferiore per $\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| < \frac{n}{10}\Big)$ e **(facoltativo)**, nel caso $p = 1/2$, determinare un valore di n per cui

$$\mathbb{P}\Big(\big|Y_n - \mathbb{E}(Y_n)\big| < \frac{n}{10}\Big) > \frac{9}{10}.$$

Laurea triennale in MATEMATICA, Corso di **PROBABILITÀ 1**

ESONERO DEL 10.06.2011, Canale I-Z (G. Nappo)

NOME e COGNOME (scrivere in stampatello) ____

N.B. Scrivere le soluzioni degli esercizi esclusivamente su questi fogli giustificando brevemente i passaggi svolti.

Esercizio 3. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ ax & \text{per } 1 < x < 2 \\ 2a + b & \text{per } 2 < x < 3 \\ 0 & \text{per } x > 3 \end{cases}$$

i) Mostrare che $a = 1/3$ e $b = -1/6$ sono gli unici valori per i quali $f(x)$ è una densità di probabilità e contemporaneamente $\mathbb{P}(X < 2) = \mathbb{P}(X > 2)$, dove X è una variabile aleatoria con densità $f(x)$.

ii) Calcolare la funzione di distribuzione $F_X(x)$ della variabile aleatoria X con densità $f(x)$.

Sia ora X_n una successione di variabili aleatorie indipendenti e tutte con la stessa distribuzione di X. Siano A_n gli eventi definiti da $A_n = \{X_n > 2\}$: gli eventi A_n, $n \geq 1$, formano uno schema di Bernoulli infinito di parametro p.

iii) (i) Quanto vale p?
(ii) **(Facoltativo)** Giustificare il motivo per cui gli eventi A_n, $n \geq 1$, sono globalmente indipendenti.

Sia ora S_n il numero degli indici $i \leq n$ per i quali $X_i > 2$.

iv) Scrivere la formula esatta per $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$.

v) Calcolare approssimativamente $\mathbb{P}(S_{100} \leq 45)$.