CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ -
SOLUZIONI del compito d'ESAME del 4/06/2002
I anno - Laurea Triennale in Matematica - (Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

ESERCIZIO 1. Si considera un esperimento che consta di due reazioni nucleari. In ciascuna reazione ogni particella presente si divide in due, con probabilità p, oppure non si divide. Inizialmente è presente una sola particella. Dopo la prima reazione, le particelle presenti si comportano nello stesso modo, indipendentemente l'una dall'altra.

a) Si determini la legge del numero N di particelle presenti dopo la seconda reazione.
Nel caso in cui p sia un numero razionale, la descrizione dell'esperimento può essere schematizzata nel seguente modo: si effettuano estrazioni con reinserimento da un'urna che contiene palline bianche e nere, con la percentuale di palline bianche uguale a p. Se la prima pallina estratta è nera allora si procede ad una sola ulteriore estrazione, se invece la prima pallina estratta è bianca allora si procede a due estrazioni. Posto B_i l'evento l'$i-$esima palline estratta è bianca, si ha che
1. $B_1^c \cap B_2^c$ corrisponde a nessuna duplicazione (ne' nella prima ne' nella seconda reazione), e quindi $N = 1$;
2. $B_1^c \cap B_2$ corrisponde a nessuna duplicazione nella prima reazione e a una duplicazione nella seconda reazione, e quindi $N = 2$;
3. $B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c$ corrisponde a una duplicazione nella prima reazione e a nessuna duplicazione nella seconda reazione, e quindi $N = 2$;
4. $(B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3)$ corrisponde a una duplicazione nella prima reazione e a una sola duplicazione nella seconda reazione, e quindi $N = 3$;
5. $B_1 \cap B_2 \cap B_3$ corrisponde a una duplicazione nella prima reazione e a due duplicazioni nella seconda reazione, e quindi $N = 4$.

Di conseguenza N assume solo i valori $1, 2, 3, 4$, e $P(N = 1) = (1 - p)^2$, $P(N = 2) = (1 - p)p + p(1 - p)^2$, $P(N = 3) = 2p^2(1 - p)$, e $P(N = 4) = p^3$.

Il caso in cui p non è razionale si può modellizzare in modo simile, a partire da 3 eventi B_i globalmente indipendenti e con probabilità p.

**b) Sapendo che dopo le due reazioni sono presenti due sole particelle, determinare la probabilità dell'evento $D_1 = \{$*è avvenuta*

una divisione durante la prima reazione$\}$.

Rifacendosi al punto **a)** si trova che $D_1 = B_1$ e quindi $P(D_1|N=2) = P(B_1|(B_1^c \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c))$, quindi

$$P(D_1|N=2) = \frac{P(B_1 \cap \{B_1^c \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c)\})}{P((B_1^c \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c))}$$

$$= \frac{P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c))}{P(B_1^c \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c)} = \frac{p(1-p)^2}{p(1-p) + p(1-p)^2} = \frac{1-p}{2-p}.$$

c) Ritrovare $P(D_1)$ (non condizionata) mediante la formula delle pro-babilità totali, applicata alla partizione $\{N = k\}$.

Si tratta di controllare che $p = P(D_1) = \sum_{k=1}^{4} P(N=k)P(D_1|N=k)$ ovvero, tenendo conto che $P(N=k)P(D_1|N=k) = P(\{N=k\} \cap D_1) = P(\{N=k\} \cap B_1)$, che

$$P(\{N=1\} \cap B_1) + P(\{N=2\} \cap B_1) + P(\{N=3\} \cap B_1) + P(\{N=4\} \cap B_1)$$

$$= 0 + P(B_1 \cap B_2^c \cap B_3^c) + P((B_1 \cap B_2 \cap B_3^c) \cup (B_1 \cap B_2^c \cap B_3)) + P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$
$$= p(1-p) + 2p^2(1-p) + p^3 = p((1-p) + 2p(1-p) + p^2) = p(1-p+p)^2 = p$$

ESERCIZIO 2. Una piscina ha quattro corsie, numerate da 1 a 4. Analizziamo il comportamento di tre nuotatori Alberto, Bruno e Carlo, che ogni volta, dopo ogni vasca, si spostano su una corsia tra quelle adiacenti, scegliendola a caso. Alberto parte dalla corsia 1, Bruno dalla corsia 2, e Carlo sceglie tra la prima e la seconda corsia, lanciando una moneta equa.

a1) Calcolare la probabilità che "*Alberto faccia la seconda vasca in corsia 2, la terza in corsia 1, la quarta in corsia 2 e che, dopo aver completato la quarta vasca, si ritrovi nella corsia da cui è partito, cioè la 1*".
Schematicamente Alberto passa dalla corsia $1 \to 2$, poi da $2 \to 1$, $1 \to 2$, da $2 \to 1$. Ciò avviene con probabilità $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

a2) Calcolare la probabilità che "*Alberto, dopo aver completato la quarta vasca, si trovi di nuovo nella corsia da cui è partito,*

***cioè la 1.*"**
Oltre al caso del punto precedente si deve considerare il caso in cui Alberto passa dalla corsia $1 \to 2$, poi da $2 \to 3$, da $3 \to 2$, da $2 \to 1$. Ciò avviene con probabilità $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.
Complessivamente quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.

b) Calcolare la probabilità che "*Bruno, dopo aver completato la quarta vasca, si trovi di nuovo nella corsia da cui è partito, cioè la 2.*"
Analogamente al caso precedente si devono considerare vari casi:
1. Bruno passa dalla corsia $2 \to 1$, poi da $1 \to 2$, da $2 \to 1$, da $1 \to 2$. Ciò avviene con probabilità $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$;
2. Bruno passa dalla corsia $2 \to 1$, poi da $1 \to 2$, da $2 \to 3$, da $3 \to 2$. Ciò avviene con probabilità $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$;
3. Bruno passa dalla corsia $2 \to 3$, poi da $3 \to 2$, da $2 \to 1$, da $1 \to 2$. Ciò avviene con probabilità $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{8}$;
4. Bruno passa dalla corsia $2 \to 3$, poi da $3 \to 2$, da $2 \to 3$, da $3 \to 2$. Ciò avviene con probabilità $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$;
5. Bruno passa dalla corsia $2 \to 3$, poi da $3 \to 4$, da $4 \to 3$, da $3 \to 2$. Ciò avviene con probabilità $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Complessivamente quindi la probabilità cercata è $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{11}{16}$.

c) Sapendo che "*dopo aver completato la quarta vasca, Carlo è sulla stessa corsia da cui è partito*", calcolare la probabilità che "*sia partito dalla corsia 2*".

Indichiamo con A l'evento "*dopo aver completato la quarta vasca, Carlo è sulla stessa corsia da cui è partito*" e con C_i gli eventi "*Carlo è partito dalla corsia i*". Allora si cerca $P(C_2|A)$. Ora

$$P(C_2|A) = \frac{P(A|C_2)P(C_2)}{P(A|C_1)P(C_1) + P(A|C_2)P(C_2)} = \frac{11}{6+11} = \frac{11}{17},$$

poiché $P(C_i) = \frac{1}{2}$, e $P(A|C_1) = \frac{3}{8} = \frac{6}{16}$ e $P(A|C_2) = \frac{11}{16}$, visti i punti precedenti.

ESERCIZI IN COMUNE CON LA SECONDA PROVA IN ITINERE

ESERCIZIO 3. In una scarpiera ci sono 5 paia di scarpe ammucchiate alla rinfusa. Tra queste vengono estratte a caso quattro scarpe.

a) Individuare la legge del numero X di scarpe destre estratte.

b1) Sapendo che X è uguale a 2, calcolare la probabilità che il numero Y di paia estratte sia uguale a 0. (**suggerimento**: si osservi che gli esiti dell'esperimento che realizzano l'evento $\{X = 2\}$ sono in corrispondenza biunivoca con i sottoinsiemi di $2(= 4 - 2)$ elementi delle 5 scarpe sinistre)

b2) Sapendo che X è uguale a 2, individuare la legge di Y.

b3) Sapendo che X è uguale a k, individuare la legge del numero Y di paia estratte (per $k = 0, 1, 2, 3, 4$).

c) Calcolare la probabilità che venga estratto almeno un paio di scarpe.

ESERCIZIO 4. Siano X_1 e X_2 i punteggi ottenuti tirando due dadi. Sia Y il punteggio totale $X_1 + X_2$ e sia N il numero dei lanci in cui è stato ottenuto un punteggio maggiore o uguale a 4.

a) Individuare la legge di N, il suo valore atteso, e la varianza.

b1) Si calcoli la legge di X_1 condizionata a $\{N = k\}$ e $E(X_1|N = k)$, per $k = 0, 1, 2$. Si disegnino sul piano cartesiano i punti $(k, E(X_1|N = k))$, sempre per $k = 0, 1, 2$.

b2) Si calcoli il valore atteso di $E(X_1|N)$.

c1) Si determini la retta di regressione di X_1 rispetto a N.

c2) Si determini la retta di regressione di Y rispetto a N.