

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ - ESAME del 2/07/2002
I anno - Laurea Triennale in Matematica - (Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME, Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Si considerino prove ripetute con probabilità di successo uguale a p .

a1) Si determini la probabilità dell'evento $A = \{\text{la seconda prova dà un risultato diverso dalla prima prova}\}$.

a2) Sapendo che la seconda prova ha dato un risultato diverso dalla prima prova, si determini la probabilità dell'evento $B = \{\text{la prima prova è un successo}\}$.

Supponiamo ora che in generale le prove vengono interrotte quando si ha un risultato diverso dalla prima prova.

b1) Sia T il numero delle prove effettuate. Si calcolino $E[T|X_1 = 1]$, $E[T|X_1 = 0]$ e $E[T]$, dove $X_i = 1$ se l' i -sima prova è un successo, e $X_i = 0$ altrimenti, (per $i \geq 1$).

b2) Si determini la legge di T .

c) Sapendo che sono state effettuate n prove, determinare la probabilità dell'evento B .

ESERCIZIO 2. Si effettuano due esperimenti indipendenti: il primo consiste nell'estrarre una pallina da un'urna che contiene 3 palline numerate 0, 1 e 2, mentre il secondo consiste nel lancio di una moneta onesta.

Sia X la variabile aleatoria che vale due volte il numero estratto dall'urna, e sia Y la variabile aleatoria che vale 0 se esce testa e 1 se esce croce.

a1) Si determini il valore atteso di $X + Y$.

a2) Si determini la varianza di $X + Y$.

a3) Si determini la legge di $X + Y$.

b1) Si determini il valore atteso di XY .

b2) Si determini la varianza di XY .

c1) Si determini il coefficiente di correlazione tra $U = X + Y$ e $V = XY$.

c2) Si determini la retta di regressione di $V = XY$ rispetto a $U = X + Y$.

ESERCIZIO 3. Un virus si diffonde mediante i messaggi di posta elettronica, all'interno di un file in attachment. Dall'esame dei primi messaggi ricevuti, è stato rilevato che il 10 per cento dei messaggi con attachment contengono il virus e che i messaggi con attachment e senza virus sono il 45 per cento dei messaggi.

Osservando che le frequenze relative sono probabilità:

- a1)** determinare la frequenza relativa dei messaggi contenenti il virus,
- a2)** determinare la frequenza relativa dei messaggi che non contengono un attachment.

Si supponga ora che tutti i messaggi ricevuti siano stati scelti (indipendentemente l'uno dall'altro) tra quelli di una stessa banca dati, che contiene una proporzione p di messaggi con virus.

b1) Sia noto che $p = 0,1$. Sia \hat{p}_n la frequenza relativa dei messaggi che contengono il virus, se si esaminano n messaggi. Qual è il numero n di messaggi che dobbiamo esaminare per garantire che, con una probabilità almeno del 95 per cento, \hat{p}_n differisca da p per non più di 0,01?

b2) Si risponda alla domanda b1), nel caso in cui p non sia noto.

c) (FACOLTATIVO) Si risponda alla domanda b1) in modo approssimato, utilizzando il Teorema del Limite Centrale.

ESERCIZIO 4. Un'urna contiene $r = 4$ palline, numerate da 1 a 4, che vengono estratte una dopo l'altra senza reinserimento, ottenendo i numeri X_1, X_2, X_3 e X_4 . Siano

$$M_1 = X_1 \quad M_n = \min(X_1, \dots, X_n), \quad n = 2, 3, 4$$

(si noti che quindi $M_4 = 1$).

a1) Determinare le leggi di M_1, M_2 e M_3 .

a2) Determinare i valori attesi di M_1, M_2 e M_3 .

b1) Per $n = 2, 3, 4$, e per tutti i valori di k per cui ha senso, determinare prima

$$P(M_n < M_{n-1} | M_{n-1} = k) = E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}} | M_{n-1} = k),$$

e poi

$$E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}} | M_{n-1}).$$

b2) Per $n = 2, 3, 4$ determinare $P(M_n < M_{n-1}) = E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}})$.

c) Determinare il valore atteso del numero N delle estrazioni (successive alla prima) in cui si ottiene un numero più piccolo di tutti quelli estratti in precedenza.

ESAME DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 02/07/2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME..... COGNOME.....

ESERCIZIO 1.

a1) $P(A) =$

a2) $P(B) =$

b1) $E[T|X_1 = 1] =$

$E[T|X_1 = 0] =$

$E[T] =$

b2) $P(T = k) =$ per k

c)

ESERCIZIO 2.

a1) $E[X+Y] =$

a2) $Var(X+Y) =$

a3) Legge di $X + Y$
.....
.....
.....

b1) $E[XY] =$

b2) $Var(XY) =$

c1) Coefficiente di correlazione tra $U = X+Y$ e $V = XY =$

c2) Retta di regressione di $V = XY$ rispetto a $U = X + Y$
.....
.....

ESERCIZIO 3.

- a1) frequenza relativa dei messaggi con virus.....
- a2) frequenza relativa dei messaggi senza attachment
- b1) ($p = 0, 1$) $n = \dots\dots\dots$
- b2) (p non noto) $n = \dots\dots\dots$
- c) (FACOLTATIVO) $n \approx \dots\dots\dots$

ESERCIZIO 4.

- a1) Leggi di M_1, M_2 e M_3 .
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
- a2) $E[M_1] = \dots\dots\dots$ $E[M_2] = \dots\dots\dots$ $E[M_3] = \dots\dots\dots$
- b1) Per $n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1} | M_{n-1} = k) =$
.....
.....
.....
.....
 $E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}} | M_{n-1}) =$
.....
.....
.....
.....
- b2) $n = 2, 3, 4$ $P(M_n < M_{n-1}) = E(\mathbb{I}_{\{M_n < M_{n-1}\}})$.
.....
.....
.....
.....
- c) $E[N] = \dots\dots\dots$