SECONDA PROVA in ITINERE del 28 maggio 2002
CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ
I anno - Laurea Triennale in Matematica
(Prof. Nappo e Prof. Piccioni)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME, Le risposte devono essere giustificate e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1.

Si consideri una coppia di variabili aleatorie (X, Y), a valori in $\{-1, 0, 1\}$ e con la seguente legge congiunta

$$P(X = i, Y = j) = \alpha \quad |i| = |j|, \quad P(X = i, Y = j) = \beta, \quad \text{altrimenti.}$$

a1. Si determinino i valori di α e β ammissibili, cioè i valori per i quali tale legge è ben definita, e si verifichi che $\alpha = \frac{1}{10}$ e $\beta = \frac{1}{8}$ sono valori ammissibili.

a2. Si calcoli $Cov(X, Y)$ per α e β ammissibili. Le variabili X e Y sono correlate? per $\alpha = \frac{1}{10}$ e $\beta = \frac{1}{8}$, le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti?

b1. Si determini $E(X|Y = i)$ per $i = -1, 0, 1$, per α e β ammissibili.

b2. Si verifichi che $E[Y E(X|Y)] = E(Y X)$, per α e β ammissibili.

Siano $Z = min(X, Y)$ e $W = max(X, Y)$, e si consideri $\alpha = \frac{1}{10}$ e $\beta = \frac{1}{8}$.

c1. Si determini la legge congiunta di Z e di W.

c2. Le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti?

ESERCIZIO 2. Due giocatori A e B tirano una moneta equa ciascuno:
- se ottengono due facce diverse allora vince colui che ha fatto testa,
- se entrambi ottengono la stessa faccia, allora non vince nessuno.

I due giocatori ripetono il gioco n volte. Sia $S = S_n$ il numero di teste ottenute dal giocatore A e sia $Z = Z_n$ il numero di volte in cui A vince.
NOTAZIONI Si pongano gli eventi

$$A_i = \textit{ il giocatore } A \textit{ ottiene testa all'} i\textit{-simo lancio} \ ,$$

e

$$B_j = \textit{ il giocatore } B \textit{ ottiene testa al } j\textit{-simo lancio}$$

. Si osservi che, ai fini del problema solo tre tipi di esiti sono interessanti, ovvero $A_i \cap B_i$, $A_i \cap B_i^c$ e A_i^c.

a. **Si individuino le leggi marginali di S e di Z, i valori attesi e le varianze**.

b1. **Si esprimano S e Z come funzioni di $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$ e di $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}$**.

b2. **Si determini il coefficiente di correlazione** $\rho(S, Z)$

b3. **Si determini** $\hat{S}(Z) = a^* + b^* Z$, cioè la migliore approssimazione di S, affine in Z (**retta di regressione**).

c. **Si calcoli la legge di S condizionata a Z**, cioè si calcoli $P(S = k | Z = i)$, individuando per quali valori i ha senso, e per quali valori k è diversa da zero.

NOTA BENE: si può considerare il caso $n = 2$, invece del caso generale.

FACOLTATIVO: si può considerare il caso di monete non eque, ma simili, con probabilità di testa uguale a p.

SECONDA PROVA in ITINERE del 28 maggio 2002
FOGLIO RISPOSTE

NOME.. COGNOME.....................................

ESERCIZIO 1.
a1. i valori ammissibili di α e β sono:..............................
Verifica SI NO
a2. $Cov(X,Y)$=...................
Le variabili X e Y sono correlate: SI NO.
Le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti: SI NO.
b1. $E(X|Y=-1)$=......., $E(X|Y=0)$=......., $E(X|Y=1)$=.......
b2. $E[YE(X|Y)]$=........, $E(YX)$=..........
c1. Legge congiunta di Z e di W.
....
....
....
....
....
....
c2. Le variabili aleatorie Z e W sono indipendenti: SI NO.

ESERCIZIO 2.

a. Legge di S:...

$E(S)$=............ $Var(S)$=.............
Legge di Z:...
$E(Z)$=............ $Var(Z)$=.............

b1. S=................................ Z=.....................................

b2. $\rho(S,Z)$=..............

b3. $\hat{S}(Z) = a^* + b^* Z$=..

c. $P(S=k|Z=i)$=..............................,
per i.................... e k ....

ESERCIZIO 2: SOLUZIONI.

a. Si individuino le leggi marginali di S e di Z, i valori attesi e le varianze. Si osservi che

$$S = S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{e} \quad Z = Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}.$$

Gli eventi A_i sono indipendenti e $P(A_i) = p = \frac{1}{2}$. Analogamente gli eventi $A_i \cap B_i^c$ sono indipendenti e con $P(A_i \cap B_i^c) = p(1-p) = \frac{1}{4}$. Quindi la legge di S è $Bin(n,p) = Bin(n, \frac{1}{2})$, con $E(S) = np = \frac{n}{2}$ e $Var(S) = np(1-p) = \frac{n}{4}$. Analogamente la legge di Z è $Bin(n, p(1-p)) = Bin(n, \frac{1}{4})$, con $E(Z) = np(1-p) = \frac{n}{4}$ e $Var(Z) = np(1-p)\,(1-p(1-p)) = n\frac{1}{4}\frac{3}{4} = n\frac{3}{16}$.

b1. Si esprimano S e Z come funzioni di $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$ e di $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}$.

$$S = S_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i} + \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c} \quad \text{e} \quad Z = Z_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}.$$

b2. Si determini il coefficiente di correlazione $\rho(S, Z)$ e $\hat{S}(Z) = a^* + b^* Z$, cioè la migliore approssimazione di S, affine in Z (retta di regressione). Il coefficiente di correlazione

$$\rho(S, Z) = \frac{Cov(S, Z)}{\sqrt{Var(S)}\sqrt{Var(Z)}}$$

Posto $N = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$ si ha che $Cov(S, Z) = Cov(N+Z, Z) = Cov(N, Z) + Cov(Z, Z) = Cov(N, Z) + Var(Z) =$. Ora

$$Cov(N, Z) = \sum_{i=1}^{n} Cov(\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}, \mathbf{1}_{A_i \cap B_i^c}) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}, \mathbf{1}_{A_j \cap B_j^c})$$

$$= n[P(\emptyset) - P(A_1 \cap B_1) P(A_1 \cap B_1^c)] = -np^2 p(1-p) = -np^3(1-p) = -n\frac{1}{16},$$

in quanto le v.a. $\mathbf{1}_{A_i \cap B_i}$ e $\mathbf{1}_{A_j \cap B_j^c}$ sono indipendenti per $i \neq j$ (e quindi non correlate). Riassumendo

$$\rho(S, Z) = \frac{Cov(S, Z)}{\sqrt{Var(S)}\sqrt{Var(Z)}} = \frac{-np^3(1-p) + np(1-p)\,(1-p(1-p))}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{np(1-p)\,(1-p(1-p))}} =$$

$$= \frac{np(1-p)\left(-p^2 + 1 - p(1-p)\right)}{np(1-p)\sqrt{1-p(1-p)}} = \frac{1-p}{\sqrt{1-p(1-p)}}$$

e quindi

$$\rho(S,Z) = \frac{Cov(N,Z) + Var(Z)}{\sqrt{Var(S)}\sqrt{Var(Z)}} = \frac{-n\frac{1}{16} + n\frac{3}{16}}{n\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{3}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Quindi $a^* = E(S) - \frac{Cov(S,Z)}{Var(Z)}E(Z)$ e $b^* = \frac{Cov(S,Z)}{Var(Z)}$

c. Si calcoli la legge di S condizionata a Z, cioè si calcoli $P(S = k|Z = i)$, individuando per quali valori i ha senso, e per quali valori k è diversa da zero. La probabilità $P(S = k|Z = i)$ ha senso solo se $P(Z = i) > 0$, e quindi per $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, ed è diversa da zero solo per $i \le k \le n$, e si ha:

$$P(S = k|Z = i) = \frac{P(N + Z = k, Z = i)}{P(Z = i)} = \frac{P(N + i = k, Z = i)}{P(Z = i)}$$
$$= \frac{P(N = k - i, Z = i)}{P(Z = i)} = \frac{P(N = k - i, Z = i, W = n - k)}{P(Z = i)},$$

dove $W = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i^c}$. Si tratta di n prove indipendenti a tre esiti, ed N, Z, W hanno quindi distribuzione congiunta multinomiale, con probabilità $p^2 = \frac{1}{4}$, $p(1-p) = \frac{1}{4}$ e $1 - p = \frac{1}{2}$, rispettivamente.

$$P(S = k|Z = i) = \frac{\frac{n!}{(k-i)!i!(n-k)!}\left(p^2\right)^{k-i}\left(p(1-p)\right)^{i}(1-p)^{n-k}}{\frac{n!}{i!(n-i)!}\left(p(1-p)\right)^{i}\left(1-p(1-p)\right)^{n-i}}$$

$$P(S = k|Z = i) = \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{p^2}{1-p(1-p)}\right)^{k-i}\left(\frac{1-p}{1-p(1-p)}\right)^{n-k}$$
$$= \frac{(n-i)!}{(k-i)!(n-k)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-i}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

per $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $i \le k \le n$.

Alternativamente, per ottenere lo stesso risultato,si poteva ragionare nel seguente modo: sapendo che i prove sono risultate di tipo $A_j \cap B_j^c$, (cioè Testa per A e Croce per B), la probabilità che k siano di tipo A_j equivale a richiedere che tra le $n - i$ prove rimaste $k - i$ siano di tipo $A_j \cap B_j$ (cioè Testa per A e Testa per B) e le rimanenti $n - i - (k - i) = n - k$ siano di tipo A_j^c (cioè Croce per A). Poiché sappiamo che tra queste $n - i$ non si è mai verificato un evento di tipo $A_j \cap B_j^c$, le probabilità da adoperare sono appunto

$$P(A_j \cap B_j | (A_j \cap B_j^c)^c) = \frac{p^2}{1-p(1-p)} \quad \text{e} \quad P(A_j^c | (A_j \cap B_j^c)^c) = \frac{1-p}{1-p(1-p)}$$