Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Prova di giovedi 17 febbraio 2005 (tempo a disposizione: 3 ore).
consegna compiti e inizio orale Lunedì 21 ore 9,30
Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. A e B si sfidano in una serie di 12 partite a scacchi. Supponiamo che in ogni partita vi sia una probabilità del 60% che vinca A, del 35% che vinca B e del 5% che la partita venga chiusa in pareggio; si suppone inoltre che i risultati delle diverse partite siano completamente indipendenti fra di loro.
(**Attenzione:** il quesito **e)** può essere svolto prima dei quesiti con l'asterisco)

a) a-i Qual è la probabilità che *A non vinca nella* 1^a *partita*? **a-ii** E quella che *A perda nella* 1^a *partita*? **a-iii** Infine, **sapendo che** *A non ha vinto nella* 1^a *partita*, qual è la probabilità che *A perda nella* 1^a *partita*?

b) b-i Qual è la probabilità che *A vinca tutte le 12 partite*? **b-ii** E quella che *A perda almeno una delle partite*? **b-iii** Infine qual è la probabilità che *A vinca esattamente k partite*?(specificare per quali valori di k tale probabilità risulta positiva)

c)* Qual è la probabilità di {*A vince esattamente 7 partite e B vince esattamente 3 partite*}?

d)* **Sapendo che** *A ha vinto esattamente 7 partite*, qual è la probabilità che *vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio*?

e) Supponiamo ora che, nel corso del tempo, vengano giocate 400 partite fra A e B (sempre sotto le condizioni enunciate sopra). In termini del Teorema Centrale del Limite trovare un'approssimazione per la probabilità che *il numero delle partite vinte da A sia compreso fra 220 e 260.*

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ k\sqrt{x} & \text{per } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k.
b) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 93/35$.
c) Calcolare la funzione di distribuzione di X.
d) FACOLTATIVO Calcolare $P(\sqrt{X} \leq 3/2)$.

Esercizio 3. X ed Y sono due variabili aleatorie discrete con distribuzione di probabilità descritta nella seguente tabella

$Y \backslash X$	**1**	**2**	**3**	**4**
−1	c	$2c$	$2c$	c
0	0.05	0.05	0.05	0.05
1	0.1	0	0.1	0

a) Calcolare il valore di c.
b) Calcolare $\mathbb{E}(Y)$ ed $\mathbb{E}(XY)$.
c) Calcolare $P(Y = 0 | X = 3)$.
d) Calcolare $P(X + Y \leq 2)$.

FOGLIO RISPOSTE della prova di giovedì 17 febbraio 2005

NOME e COGNOME ....

canale NAPPO ☐ **canale SPIZZICHINO** ☐

Esercizio 1.

a-i) P(A *non vinca nella* 1^a *partita*)= ....

a-ii) P(A *perde nella* 1^a *partita*)= ....

a-iii) sapendo che A *non ha vinto nella* 1^a *partita*,
la probabilità che A *perda nella* 1^a *partita*= ....

b-i) P(A *vince tutte le 12 partite*)= ....

b-ii)P(A *perde almeno una delle partite*)= ....

b-iii) P(A *vince esattamente* k *partite*)= ....

c)* P(A *vince esattamente 7 partite e* B *vince esattamente 3 partite*)= ....

d)* Sapendo che A *ha vinto esattamente 7 partite*,
la probabilità che *vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio*= ....

e) La probabilità che su 400 partite
il numero delle partite vinte da A *sia compreso fra 220 e 260* ....

Esercizio 2.

a) k= ....

b) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 93/35$ svolto........ ☐ non svolto......... ☐

c) La funzione di distribuzione di X vale

$$F(x) = \begin{cases} \text{...} & \text{per ....} \\ \text{...} & \text{per ....} \\ \text{...} & \text{per ....} \end{cases}$$

d) FACOLTATIVO $P(\sqrt{X} \leq 3/2)$= ....

Esercizio 3.

a) c= ....

b) $\mathbb{E}(Y)$= .... ed $\mathbb{E}(XY)$= ....

c) $P(Y = 0|X = 3)$= ....

d) $P(X + Y \leq 2)$= ....

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Calcolo delle Probabilità I (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

SOLUZIONI della prova di giovedì 17 Febbraio 2005

Esercizio 1. A e B si sfidano in una serie di 12 partite a scacchi. Supponiamo che in ogni partita vi sia una probabilità del 60% che vinca A, del 35% che vinca B e del 5% che la partita venga chiusa in pareggio; si suppone inoltre che i risultati delle diverse partite siano completamente indipendenti fra di loro.
(**Attenzione:** il quesito **e)** può essere svolto prima dei quesiti con l'asterisco)

a-i) Qual è la probabilità che *A non vinca nella* 1^a *partita*?
soluzione di a-i): La probabilità vale $40/100 = 2/5$
Infatti posto $A_1 = \{A \textit{ vince nella } 1^a \textit{ partita}\}$ si ha $p_A = P(A_1) = 60/100 = 3/5$ e si cerca $P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 1 - 60/100 = 40/100 = 2/5$.

a-ii) E quella che *A perda nella* 1^a *partita*?
soluzione di a-ii): La probabilità vale $35/100 = 7/20$
Infatti posto $B_1 = \{B \textit{ vince nella } 1^a \textit{ partita}\} = \{A \textit{ perde nella } 1^a \textit{ partita}\}$ e si ha $p_B = P(B_1) = 35/100 = 7/20$.

a-iii) Infine, sapendo che *A non ha vinto nella* 1^a *partita*, qual è la probabilità che *A perda nella* 1^a *partita*?
soluzione di a-iii): La probabilità vale $35/40 = 7/8$

Infatti si cerca

$$P(B_1|A_1^c) = \frac{P(B_1 \cap A_1^c)}{P(A_1^c)} = \frac{P(B_1)}{P(A_1^c)} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}.$$

b-i) Qual è la probabilità che *A vinca tutte le 12 partite*?
soluzione di b-i): La probabilità vale $(3/5)^{12}$
Infatti posto $A_i = \{A \textit{ vince nella } i-\textit{sima partita}\}$ si ha che gli eventi A_i sono indipendenti, con $P(A_i) = p_A = 60/100 = 3/5$, e si cerca

$$P(\bigcap_{i=1}^{12} A_i) = \prod_{i=1}^{12} P(A_i) = \left(\frac{3}{5}\right)^{12}.$$

b-ii) E quella che *A perda almeno una delle partite*?
soluzione di b-ii): La probabilità vale $1 - (13/20)^{12}$
Infatti, posto $B_i = \{B \textit{ vince nella } i-\textit{sima partita}\} = \{A \textit{ perde nella } i-\textit{sima partita}\}$, gli eventi B_i sono indipendenti, con $P(B_i) = p_B == 35/100 = 7/20$, e si cerca

$$P\Big(\big(\bigcap_{i=1}^{12} B_i^c\big)^c\Big) = 1 - P\Big(\bigcap_{i=1}^{12} B_i^c\Big) = 1 - \prod_{i=1}^{12}\big(1 - P(B_i)\big) = 1 - \left(1 - \frac{7}{20}\right)^{12} = 1 - \left(\frac{13}{20}\right)^{12}.$$

b-iii) Infine qual è la probabilità che *A vinca esattamente k partite*? (specificare per quali valori di k tale probabilità risulta positiva)
soluzione di b-iii): La probabilità vale $\binom{12}{k}(3/5)^k(2/5)^{12-k}$, per $k = 0, 1, ..., 12$, mentre vale 0 per tutti gli altri valori di k
Infatti si tratta di calcolare la probabilità che il numero di successi su n prove ripetute (cioè indipendenti e con la stessa probabilità p) sia uguale a k. Tale probabilità è data dalla distribuzione binomiale e vale $\binom{n}{k}p^k\,(1-p)^{n-k}$. In questo caso successo all'$i - sima$ prova significa che si verificato l'evento A_i, $n = 12$ e $p = p_A = P(A_i) = 3/5$. In altre parole posto $X_A = S_{12} = \sum_{i=0}^{12} \mathbf{1}_{A_i}$ la variabile aleatoria $X_A = S_{12}$ ha distribuzione $bin(12, 3/5)$.

c)* Qual è la probabilità di {*A vince esattamente 7 partite e B vince esattamente 3 partite*}?
soluzione di c): La probabilità cercata vale $12!/(7! \cdot 3! \cdot 2!)\,(3/5)^7\,(7/20)^3\,(1/20)^2$.
Infatti si tratta di 12 prove indipendenti a 3 esiti (vince A, vince B e pareggio) con probabilità $p_A = 3/5 (= 12/20)$, $p_B = 7/20$ e $p_C = 1 - (p_A + p_B) = 1/20$. Posto, come sopra, X_A il numero delle vittorie di A, X_B il numero delle vittorie di B ed $X_C = 12 - (X_A + X_B)$ il numero dei pareggi, si cerca

$$P(X_A = 7,\, X_B = 3) = P(X_A = 7,\, X_B = 3, X_C = 2) = \frac{12!}{7! \cdot 3! \cdot 2!}\, p_A^7\, p_B^3 p_C^2.$$

d)* Sapendo che *A ha vinto esattamente 7 partite*, qual è la probabilità che *vi sia stata esattamente una partita terminata in pareggio*?
soluzione di d): La probabilità cercata vale $5\,\left(\frac{7}{12}\right)^4\,\left(\frac{1}{12}\right)^1$
Infatti condizionatamente a sapere che $X_A = 7$ si tratta della probabilità che sulle rimanenti 5 prove ci siano 4 vittorie di B ed un pareggio. Dalla teoria, e in accordo con l'intuizione, si ha che la distribuzione di X_B e di X_C **condizionata** all'evento *A ha vinto* si ottiene attraverso le probabilità binomiali, tenendo conto che, per ciascuna delle 5 partite rimaste (in cui A non ha vinto), vanno considerate la probabilità di vittoria di B, **condizionata** all'evento *A non ha vinto* e la probabilità di pareggio **condizionata** all'evento *A non ha vinto*, ossia

$$P(X_B = 4,\, X_C = 1 | X_A = 7) = \frac{5!}{4! \cdot 1!}\,\left(\frac{p_B}{1 - p_A}\right)^4\,\left(\frac{p_C}{1 - p_A}\right)^1.$$

Allo stesso risultato si può arrivare per calcolo diretto utilizzando

$$P(X_B = 4,\, X_C = 1 | X_A = 7) = \frac{P(X_A = 7\, X_B = 4,\, X_C = 1)}{P(X_A = 7)}$$

$$P(X_A = 7\, X_B = 4,\, X_C = 1) = \frac{12!}{7! \cdot 4! \cdot 1!}\, p_A^7\, p_B^4 p_C^1 \qquad P(X_A = 7) = \frac{12!}{7! \cdot 5!}\, p_A^7\,(1 - p_A)^5.$$

e) Supponiamo ora che, nel corso del tempo, vengano giocate 400 partite fra A e B (sempre sotto le condizioni enunciate sopra). In termini del Teorema Centrale del Limite trovare un'approssimazione per la probabilità che *il numero delle partite vinte da A sia compreso fra* 220 *e* 260.
soluzione di e): La probabilità cercata vale circa $0,9586$.
Infatti, per il Teorema Centrale del Limite si ha che, posto $S_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}_{A_i}$, $p = P(A_i) = 3/5$, e $\Phi(x)$ la funzione di distribuzione di una v.a. gaussiana standard,

$$P\big(a \leq \tfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\big) \simeq \Phi(b) - \Phi(a)$$

uniformemente in a e b, e quindi anche che

$$P(\alpha \leq S_n \leq \beta) = P\big(\tfrac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \tfrac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \tfrac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\big) \simeq \Phi\big(\tfrac{\beta - np}{\sqrt{np(1-p)}}\big) - \Phi\big(\tfrac{\alpha - np}{\sqrt{np(1-p)}}\big).$$

In particolare per $n = 400$, $\alpha = 180$ e $\beta = 300$ si ha

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq \Phi\big(\tfrac{260-400(3/5)}{\sqrt{400\,(3/5)\,(2/5)}}\big) - \Phi\big(\tfrac{220-400(3/5)}{\sqrt{400\,(3/5)\,(2/5))}}\big) = \Phi\big(\tfrac{260-240}{4\sqrt{3 \cdot 2}}\big) - \Phi\big(\tfrac{220-240}{4\sqrt{3 \cdot 2}}\big)$$

ovvero

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq \Phi\big(\tfrac{20}{4\sqrt{6}}\big) - \Phi\big(-\tfrac{20}{4\sqrt{6}}\big) = \Phi\big(\tfrac{5}{\sqrt{6}}\big) - \Phi\big(-\tfrac{5}{\sqrt{6}}\big).$$

Tenendo conto che $1/\sqrt{6} \simeq 0,408$, e quindi $5/\sqrt{6} \simeq 2,04$, e che

$$\Phi(x) - \Phi(-x) = \Phi(x) - \big(1 - \Phi(x)\big) = 2\,\Phi(x) - 1,$$

ed infine che dalle tavole della gaussiana si ha si ha $\Phi(2,04) \simeq 0.9793$

$$P(220 \leq S_{400} \leq 260) \simeq 2\,\Phi(2,04) - 1 \simeq 2 \cdot 0.9793 - 1 = 0,9586.$$

Esercizio 2. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 1 \\ k\sqrt{x} & \text{per } 1 < x < 4 \\ 0 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Calcolare il valore di k.
soluzione di a): $k = 3/14$
Infatti

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = \int_1^4 k\sqrt{y}\,dy$$

e quindi

$$k = \left(\int_1^4 \sqrt{y}\,dy\right)^{-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{4^{3/2}-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2^3-1} = \frac{3}{2}\,\frac{1}{7}.$$

La seconda uguaglianza deriva dal fatto che

$$\int_a^b \sqrt{y}\,dy = \frac{x^{3/2}\big|_a^b}{(3/2)} = \frac{2}{3}\,(b^{3/2} - a^{3/2})$$

b) Mostrare che $\mathbb{E}(X) = 93/35$.
soluzione di b):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} y\,f(y)\,dy = \frac{3}{2 \cdot 7}\int_1^4 y\,\sqrt{y}\,dy = \frac{3}{2 \cdot 7}\,\frac{y^{5/2}\big|_1^4}{(5/2)} \\ &= \frac{3}{2 \cdot 7}\,\frac{4^{5/2} - 1^{5/2}}{(5/2)} = \frac{3}{5 \cdot 7}\,(2^5 - 1) = \frac{3 \cdot 31}{5 \cdot 7} = \frac{93}{35}.\end{aligned}$$

c) Calcolare la funzione di distribuzione di X.
soluzione di c): La funzione di distribuzione di X è

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,dy \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \\ \frac{1}{7}\,(x^{3/2}-1) & \text{per } 1 \leq x < 4 \\ 1 & \text{per } x \geq 4 \end{cases}$$

Infatti i casi $x < 1$ ed $x \geq 4$ sono ovvi. Per $1 \leq x < 4$ si ha

$$F(x) = \int_{1}^{x} \frac{3}{2 \cdot 7}\,\sqrt{y}\,dy = \frac{3}{2 \cdot 7}\,\frac{y^{3/2}\big|_1^x}{(3/2)} = \frac{1}{7}\,\big(x^{3/2}-1\big).$$

d) FACOLTATIVO Calcolare $P(\sqrt{X} \leq 3/2)$.
soluzione di d): $P(\sqrt{X} \leq 3/2) = 19/56$.
Infatti

$$P(\sqrt{X} \leq 3/2) = P\big(X \leq (3/2)^2\big) = F\big((3/2)^2\big) = \frac{[(3/2)^2]^{3/2}-1}{7}$$
$$= \frac{(3/2)^3-1}{7} = \frac{(27/8)-1}{7} = \frac{27-8}{56} = \frac{19}{56}.$$

Esercizio 3. X ed Y sono due variabili aleatorie discrete con distribuzione di probabilità descritta nella seguente tabella

$Y\backslash X$	**1**	**2**	**3**	**4**
−1	c	$2c$	$2c$	c
0	0.05	0.05	0.05	0.05
1	0.1	0	0.1	0

a) Calcolare il valore di c.
soluzione di a): $c = 0.1 = 1/10$
Infatti

$$1 = \sum_{j\in\{-1,0,1\}} \sum_{i\in\{1,2,3,4\}} P(X=i,\,Y=j)$$
$$= c + 2c + 2c + c + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.1 + 0 + 0.1 + 0$$
$$= 6\,c + 4 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.1 = 6\,c + 0.4$$

da cui immediatamente $c = \frac{1}{6}\,(1 - 4/10) = \frac{1}{6}\,\frac{6}{10} = \frac{1}{10}$, e quindi

$Y\backslash X$	**1**	**2**	**3**	**4**
−1	0.1	0.2	0.2	0.1
0	0.05	0.05	0.05	0.05
1	0.1	0	0.1	0

b) Calcolare $\mathbb{E}(Y)$ ed $\mathbb{E}(XY)$.
soluzione di b): $\mathbb{E}(Y) = 0.4 = 4/10$ ed $\mathbb{E}(XY) = -1.1 = -(11/10)$
Infatti

$$\mathbb{E}(Y) = (-1)\big(0.1 + 0.2 + 0.2 + 0.1\big) + 0\big(0.05 + 0.05 + 0.05 + 0.05\big) + 1\big(0.1 + 0 + 0.1 + 0\big)$$
$$= -6\,c + 0.2 = -0.6 + 0.2 = -0.4$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{j\in\{-1,0,1\}} \sum_{i\in\{1,2,3,4\}} i\, j\, P(X=i,\, Y=j) \\
&= (-1)\cdot 1\cdot 0.1 + (-1)\cdot 2\cdot 0.2 + (-1)\cdot 3\cdot 0.2 + (-1)\cdot 4\cdot 0.1 \\
&+ 0\cdot 1\cdot 0.05 + 0\cdot 2\cdot 0.05 + 0\cdot 3\cdot 0.05 + 0\cdot 4\cdot 0.05 \\
&+ 1\cdot 1\cdot 0.1 + 1\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 3\cdot 0.1 + 1\cdot 4\cdot 0\big) \\
&= (-1)\big(0.1+0.4+0.6+0.4\big) + 0 + \big(0.1+0.3\big) \\
&= -1.5 + 0.4 = -1.1
\end{aligned}
$$

c) Calcolare $P(Y=0|X=3)$.
soluzione di c): $P(Y=0|X=3) = 1/7$
Infatti

$$
\begin{aligned}
P(Y=0|X=3) = \frac{P(Y=0,X=3)}{P(X=3)} &= \frac{P(Y=0,X=3)}{P(Y=-1,X=3)+P(Y=0,X=3)+P(Y=1,X=3)} \\
= \frac{0.05}{0.2+0.05+0.1} &= \frac{\frac{5}{100}}{\frac{35}{100}} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7}.
\end{aligned}
$$

d) Calcolare $P(X+Y\le 2)$.
soluzione di b): $P(X+Y\le 2) = 0.7 = 7/10$
Infatti

$$
P(X+Y\le 2) = \sum_{\substack{i\in\{1,2,3,4\} \\ i+j\le 2}} \sum_{j\in\{-1,0,1\}} P(X=i,\, Y=j),
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
P(X+Y\le 2) &= P(X=1,\, Y=-1) + P(X=1,\, Y=0) + P(X=1,\, Y=1) \\
&+ P(X=2,\, Y=-1) + P(X=2,\, Y=0) + P(X=3,\, Y=-1) \\
&= 0.1 + 0.05 + 0.1 + 0.2 + 0.05 + 0.2 = 0.7
\end{aligned}
$$