Corso di Laurea Triennale in Matematica
**Calcolo delle Probabilità I** (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

**Prova di martedì 20 luglio 2004** (tempo a disposizione: 3 ore).

**Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.**

**ATTENZIONE: concentrare l'attenzione sugli Esercizi 1 e 2, e dedicare il tempo rimasto a risolvere uno degli altri due.**

**Esercizio 1.** Ricordiamo che una "giornata" del gioco del lotto prevede 10 diversi gruppi indipendenti di 5 estrazioni (ciascun gruppo di estrazioni corrisponde ad una "ruota", che prende il nome dalla città in cui viene effettuata l'estrazione); le 5 estrazioni su ciascuna ruota sono effettuate in modo casuale, senza reinserimento, da un'urna contenente i numeri $\{1, 2, ..., 90\}$.

**a)** Si fissi una giornata e una ruota (ad esempio la giornata del 21 luglio 2004 e la ruota di Roma). Calcolare la probabilità che

**(i)** $\{$*il numero 16 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*$\}$
(ad esempio $\{$*il numero 16 venga estratto sulla ruota di Roma il 21 luglio 2004*$\}$).

**(ii)** $\{$*i numeri 16 e 39 vengano estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata*$\}$.

**(iii)** $\{$*almeno uno tra i numeri 16 e 39 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*$\}$.

**b)** Si fissi ora solo la giornata. Calcolare l'espressione della probabilità $\beta$ che $\{$*il numero 16 venga estratto su almeno una delle 10 ruote nella giornata fissata*$\}$.

Si consideri ora una serie di $n$ diverse giornate e, per $j = 1, 2, ..., n$, si ponga $E_j \equiv \{$*il numero 16 viene estratto sulla ruota di Roma nella giornata* $j\}$, $X_j = \mathbf{1}_{E_j}$ le variabili aleatorie binarie indicatrici dell'evento $E_j$, ed infine

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

**c)** Individuare la distribuzione di $S_n$ e scrivere la formula per la densità discreta $P(S_n = k)$ di $S_n$, **specificando** l'insieme dei valori $k$ che $S_n$ può assumere).

**d)** Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un valore di $n$ per cui risulti

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{18}\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9.$$

**e)** Calcolare la probabilità condizionata $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6)$.

**Esercizio 2.** Consideriamo un gioco in cui si lancia prima una moneta ben equilibrata e poi si lanciano due dadi ben equilibrati. Il punteggio realizzato dipende, oltre che dai valori ottenuti con i dadi, anche dal risultato del lancio della moneta secondo il seguente schema: se esce testa il punteggio è pari al valore del primo dado, se esce croce il punteggio è pari al minimo dei valori dei due dadi.

Si ponga $T$ l'evento $\{$*esce testa*$\}$, $C$ l'evento $\{$*esce croce*$\}$ ed $A$ l'evento $\{$*si ottiene un punteggio maggiore o uguale a 5*$\}$

**a)** Calcolare la probabilità di $A$.

**b)** **(i)** **Sapendo** che si è verificato l'evento $A$, calcolare la probabilità che sia uscita testa.

**(ii)** **Sapendo** che si è verificato l'evento $A$, calcolare la probabilità che sia uscita croce.

**c)** Posto $X$ il punteggio ottenuto, calcolare la distribuzione di $X$.

**d)** Calcolare il valore atteso di $X$.

**Esercizio 3.** Siano $A$ e $B$ due eventi indipendenti con probabilità $p_A$ e $p_B$ rispettivamente.
**a)** Calcolare $P(A|A \cup B)$.
Si considerino le variabili aleatorie binarie $X_A = \mathbf{1}_A$ e $X_B = \mathbf{1}_B$, indicatrici di $A$ e $B$ rispettivamente. Sia infine

$$W = X_A + X_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

**b)** Esprimere gli eventi $\{W = 0\}$, $\{W = 1\}$, $\{W = 2\}$ e $\{W \geq 1\}$ attraverso gli eventi $A$, $\overline{A}$, $B$, $\overline{B}$ e calcolare la distribuzione di $W$.
**c)** Calcolare la distribuzione congiunta di $X_A$ e $W$.
**d)** Calcolare **(i)** $P(X_A = 1|W \geq 1)$, **(ii)** $P(X_A = 1|W = 1)$.
**e)** Calcolare approssimativamente $p_A = P(A)$, $p_B = P(B)$, nel caso in cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$, dove $X$ ed $Y$ sono due variabili aleatorie indipendenti, con $X$ gaussiana di valore atteso $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 4$ ed $Y$ gaussiana standard.
**f)** Spiegare il motivo per cui $A = \{X > 1.88\}$ e $B = \{Y \leq 0\}$ sono indipendenti e calcolare approssimativamente $P(X_A = 1|W \geq 1)$.

**Esercizio 4.** Sia $X$ una variabile aleatoria con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad x < -1 \\ c\left(1 + x^3\right) & \text{per} \quad -1 \leq x < 0 \\ c\left(1 - x^3\right) & \text{per} \quad 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{per} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

**a)** Trovare il valore di $c$ e disegnare il grafico di $f_X$.
**b)** Calcolare $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.
**c)** Calcolare $\mathbb{E}(X)$ (**attenzione:** è possibile trovarlo senza fare calcoli?).

**FOGLIO RISPOSTE della prova di Martedì 20 luglio 2004**

**NOME e COGNOME** ...........................................................

**canale NAPPO** ☐ **canale SPIZZICHINO** ☐

ORALE: 22 luglio ... ☐ dopo il 26 luglio ... ☐ dopo il 22 settembre ... ☐

**Esercizio 1.**

**a)(i)**..................... **a)(ii)**..................... **a)(iii)**.....................

**b)** $\beta =$ .........................

**c)** $P(S_n = k) =$ ....................................... $k =$ ...............................

**d)** $n =$ .................. **e)** $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) =$ ..........................

**Esercizio 2.**

**a)** $P(A) =$ .............................. **b) (i)** ...................... **b) (ii)** .......................

**c)** (distribuzione di $X$)

| $X$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P(X = k)}$ | | | | | | |

**d)** $\mathbb{E}(X) =$ ..............................

**Esercizio 3.**

**a)** $P(A | A \cup B) =$ .............................

**b)** $\{W = 0\} =$ ....................., $\{W = 1\} =$ ...........................................,

$\{W = 2\} =$ ....................., $\{W \geq 1\} =$ .....................

| $W$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P(W = h)}$ | | | |

**c)**

| $X \diagdown W$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **0** | | | |
| **1** | | | |

**d)(i)** $P(X_A = 1 | W \geq 1) =$ ......................., **d)(ii)** $P(X_A = 1 | W = 1) =$ ........................

**e)** $p_A = P(X > 1.88) \simeq$ ........... $p_B = P(Y \leq 0) =$ ...........

**f) indipendenza:** svolto ☐ non svolto ☐ $P(X_A = 1 | W = 1) \simeq$ ................

**Esercizio 4.**

**a)** $c =$ ........... **grafico di** $f_X$**:** svolto ☐ non svolto ☐

**b)** $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) =$ .................. **c)** $E(X) =$ .........

**RISPOSTE della prova di Martedì 20 luglio 2004**

**Esercizio 1.**

**a)(i)**.......$\frac{1}{18}$ **a)(ii)**.......$\frac{2}{801}$ **a)(iii)**..........$\frac{87}{801}$

**b)** $\beta =$ .........$1 - \left(\frac{17}{18}\right)^1 0$

**c)** $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{n-k}$............ $k = 0, 1, ....., n-1, n$

**d)** $n = 53$ **e)** $P(S_5 = 3 | S_{10} = 6) = \frac{10}{21}$.

**Esercizio 2.**

**a)** $P(A) = \frac{2}{9}$. **b) (i)** $\frac{3}{4}$ **b) (ii)** .$\frac{1}{4}$

**c)** (distribuzione di $X$)

| $X$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P(X = k)}$ | $\frac{17}{72}$ | $\frac{15}{72}$ | $\frac{13}{72}$ | $\frac{11}{72}$ | $\frac{9}{72}$ | $\frac{7}{72}$ |

**d)** $\mathbb{E}(X) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72} \simeq 3.01388$

**Esercizio 3.**

**a)** $P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$

**b)** $\{W = 0\} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\{W = 1\} = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$,

$\{W = 2\} = A \cap B$, $\{W \geq 1\} = A \cup B$

| $W$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{P(W = h)}$ | $(1-p_A)(1-p_B)$ | $p_A(1-p_B) + (1-p_A)p_B$ | $p_A\, p_B$ |

**c)**

| $X \diagdown W$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **0** | $(1-p_A)(1-p_B)$ | $(1-p_A)p_B$ | 0 |
| **1** | 0 | $p_A(1-p_B)$ | $p_A\, p_B$ |

**d)(i)** $P(X_A = 1 | W \geq 1) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$, **d)(ii)** $P(X_A = 1 | W = 1) = \frac{p_A(1-p_B)}{p_A(1-p_B) + (1-p_A)p_B}$

**e)** $p_A = P(X > 1.88) \simeq 0.33$ $p_B = P(Y \leq 0) = 0.5$

**f) indipendenza:** svolto ☐ non svolto ☐ $P(X_A = 1 | W = 1) \simeq \frac{66}{133}$

**Esercizio 4.**

**a)** $c = \frac{2}{3}$ **grafico di** $f_X$**:** svolto ☐ non svolto ☐

**b)** $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{31}{48}$ **c)** $E(X) = 0$

Corso di Laurea Triennale in Matematica
**Calcolo delle Probabilità I** (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

**SOLUZIONI della prova di Martedì 20 luglio 2004** (tempo a disposizione: 3 ore).

**Esercizio 1.** Ricordiamo che una "giornata" del gioco del lotto prevede 10 diversi gruppi indipendenti di 5 estrazioni (ciascun gruppo di estrazioni corrisponde ad una "ruota", che prende il nome dalla città in cui viene effettuata l'estrazione); le 5 estrazioni su ciascuna ruota sono effettuate in modo casuale, senza reinserimento, da un'urna contenente i numeri $\{1, 2, ..., 90\}$.
**a) Si fissi una giornata e una ruota (ad esempio la giornata del 21 luglio 2004 e la ruota di Roma). Calcolare la probabilità che**
**(i) {*il numero 16 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*}**
(ad esempio {*il numero 16 venga estratto sulla ruota di Roma il 21 luglio 2004*}).
**(ii) {*i numeri 16 e 39 vengano estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata*}.**
**(iii) {*almeno uno tra i numeri 16 e 39 venga estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*}.**
**soluzione di a) (i): La probabilità cercata vale $\frac{1}{18}$.**

Infatti si tratta di estrarre 5 palline da un'urna che contiene 90 palline di cui 1 bianca (quella con il numero *16*) e le rimanenti 89 rosse, e posto $A_1 =$\{*il numero 16 viene estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*\}, si ha che $A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$, dove $B_i =$\{*l'i-esima pallina estratta è bianca*\}*(=*\{*il 16 esce alla i-esima estrazione* \}*)* e quindi[1]

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = \frac{1}{90} + \ldots + \frac{1}{90} = \frac{5}{90}$$

Alternativamente, poiché ai fini dell'evento $A_1$ si può pensare che si tratti di estrazioni in blocco (si vince qualunque sia l'ordine di estrazione del numero *16*), si può anche ottenere il risultato con il seguente metodo

$$P(A_1) = \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{89!}{4! \cdot 85!}}{\frac{90!}{5! \cdot 85!}} = \frac{89! \cdot 5!}{90! \cdot 4!} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$$

**soluzione di a) (ii): La probabilità cercata vale $\frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{2}{801} \simeq 0,00249$.**

Infatti si tratta di estrarre 5 palline da un'urna che contiene 90 palline di cui 2 bianche (quella con il numero *16* e quella con il numero *39*) e le rimanenti 88 rosse, e posto $A_2 =$\{*i numeri 16 e 39 vengono estratti sulla ruota fissata e nella giornata fissata*\}, si ha che $A_2 = (B_1 \cap B_2) \cup (B_1 \cap B_3) \cup \ldots (\cup B_4 \cap B_5) = \bigcup_{\{i,j\} \subset \{1,2,3,4,5\}} (B_i \cap B_j)$, dove $B_i =$\{*l'i-esima pallina estratta è bianca*\} e quindi[2] si ha

$$P(A_2) = P(B_1 \cap B_2) + P(B_2 \cap B_3) + \ldots + P(B_4 \cap B_5)$$

[1] Si ricordi che $P(B_k) = P(B_1) = \frac{1}{90}$ per $k = 1, 2, 3, 4, 5$:
infatti $\Omega = \{(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5),\ \text{con } i_h \text{ tutti distinti },i_h \in \{1, 2, ..., 90\}\}$ e $|\Omega| = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$, inoltre, ad esempio, $B_2 = \{(i_1, 16, i_3, i_4, i_5),\ \text{con } i_h \text{ tutti distinti },i_h \in \{1, 2, ..., 15, 17, ..., 90\}\}$ e $|B_2| = \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86$, da cui immediatamente $P(B_2) = \frac{|B_2|}{|\Omega|} = \frac{1}{90}$. Alternativamente

$$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(\overline{B}_1)P(B_2|\overline{B}_1) = \frac{1}{90} \cdot 0 + \frac{89}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{1}{90}.$$

[2] Si tenga conto che

$$P(B_i \cap B_j) = P(B_i)P(B_j|B_i) = \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89}$$

e che i sottoinsiemi $\{i, j\}$ di cardinalità 2 di $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, sono tanti quanti le combinazione di 5 elementi di classe 2, ovvero $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2 \cdot 1) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1)} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$

$$= \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} + \ldots + \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} = \binom{5}{2} \cdot \frac{2}{90} \cdot \frac{1}{89} = \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

Alternativamente, poiché ai fini dell'evento $A_1$ si può pensare che si tratti di estrazioni in blocco (si vince qualunque sia l'ordine di estrazione dei numeri *16* e *39*), si può anche ottenere il risultato con il seguente metodo

$$P(A_2) = \frac{\binom{2}{2} \cdot \binom{88}{3}}{\binom{90}{5}} = \frac{\frac{88!}{3! \cdot 85!}}{\frac{90!}{5! \cdot 85!}} = \frac{88! \cdot 5!}{90! \cdot 3!} = \frac{10}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801}$$

**soluzione di a) (iii): La probabilità cercata vale $2\frac{1}{18} - \frac{2}{801} (= \frac{87}{801} \simeq 0,10861)$.**

Infatti, posto $C_1 =\{$*il numero 39 viene estratto sulla ruota fissata e nella giornata fissata*$\}$, tenendo conto del principio di esclusione/inclusione, la probabilità cercata è

$$P(A_1 \cup C_1) = P(A_1) + P(C_1) - P(A_1 \cap C_1) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} - \frac{2}{9 \cdot 801} = \frac{1}{9} - \frac{2}{9 \cdot 89} = \frac{89 - 2}{9 \cdot 89} = \frac{87}{801}$$

in quanto $P(C_1) = P(A_1)$ e $A_1 \cap C_1 = A_2$.

**b) Si fissi ora solo la giornata. Calcolare l'espressione della probabilità $\beta$ che $\{$*il numero 16 venga estratto su almeno una delle 10 ruote nella giornata fissata*$\}$.**

**soluzione di b) la probabilità cercata vale** $\beta = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10} (\simeq 0,56463)$

Infatti, posto $D =\{$*il numero 16 non esce su nessuna delle 10 ruote nella giornata fissata*$\}$ si tratta di calcolare la probabilità dell'evento complementare $\overline{D}$, e quindi

$$\beta = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - P(\overline{R}_1 \cap \overline{R}_2 \cap \cdots \overline{R}_{10}) = 1 - P(\overline{R}_1) \cdot P(\overline{R}_2) \cdots P(\overline{R}_{10}) = 1 - \left(\frac{17}{18}\right)^{10},$$

dove $R_i =\{$*il numero 16 esce sulla ruota i-esima, nella giornata fissata*$\}$, per $i = 1, \ldots, 10$, cosicché $P(\overline{R}_i) = 1 - P(R_i) = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$.

**Si consideri ora una serie di $n$ diverse giornate e, per $j = 1, 2, ..., n$, si ponga $E_j \equiv \{$*il numero 16 viene estratto sulla ruota di Roma nella giornata j*$\}$, $X_j = \mathbf{1}_{E_j}$ le variabili aleatorie binarie indicatrici dell'evento $E_j$, ed infine**

$$S_n \equiv \sum_{j=1}^{n} X_j.$$

**c) Individuare la distribuzione di $S_n$ e scrivere la formula per la densità discreta $P(S_n = k)$ di $S_n$, specificando l'insieme dei valori $k$ che $S_n$ può assumere).**

**soluzione di c): La distribuzione di $S_n$ è binomiale di parametri $n$ e $\theta = \frac{1}{18}$, ovvero** $P(S_n = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{18}\right)^k \left(\frac{17}{18}\right)^{n-k}, \quad k = 0, 1, ..., n.$

Infatti basta considerare che gli eventi $E_j$ sono relativi a giornate distinte e formano una famiglia di eventi completamente (o globalmente) indipendenti ed $S_n$ conta il numero dei successi in $n$ giornate, dove successo alla $j$-esima prova significa $\{$*esce il 16 sulla ruota di Roma, nella giornata j*$\}$.

**d) Utilizzando la disuguaglianza di Chebyshev, trovare un valore di $n$ per cui risulti**

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{18}\right| \leq 0.1\right) \geq 0.9.$$

**soluzione di d): Basta prendere $n \geq 53$**

Infatti,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\theta\right|\leq 0.1\right)\geq 0.9$$

se e solo se

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\theta\right|> 0.1\right)\leq 1-0.9=0.1=\frac{1}{10}.$$

Inoltre, per la disuguaglianza di Chebyshev,

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\theta\right|> 0.1\right)\leq \frac{Var(S_n)}{n^2\cdot(0.1)^2}=\frac{n\theta(1-\theta)}{n^2\frac{1}{100}}=\frac{100\theta(1-\theta)}{n}\leq\frac{100}{4n},$$

dove l'ultima disuguaglianza vale in quanto $0\leq x(1-x)\leq\frac{1}{4}$ per ogni $x\in[0,1]$. Basta prendere $n$ in modo che valga

$$\frac{100\theta(1-\theta)}{n}=\frac{100\frac{1}{18}\frac{17}{18}}{n}\leq\frac{1}{10},$$

ovvero

$$1000\theta(1-\theta)=1000\frac{1}{18}\frac{17}{18}=\frac{17000}{324}=52,4691\leq n,$$

e quindi basta prendere $n\geq 53$.
Si osservi che in questo caso conosciamo esattamente $\theta$ e quindi **non conviene utilizzare la seconda maggiorazione**, ovvero non conviene procedere richiedendo che

$$\frac{100}{4n}\leq\frac{1}{10},\qquad \text{ovvero}\qquad \frac{1000}{4}(=2500)\leq n,$$

In questo modo infatti si ottiene un valore di $n$ molto più grande del necessario.

**e) Calcolare la probabilità condizionata** $P(S_5=3|S_{10}=6)$.

**soluzione di e): La probabilità cercata vale $\frac{10}{21}$.**

Infatti, per la formula di Bayes

$$P(S_5=3|S_{10}=6)=\frac{P(S_5=3)P(S_{10}=6|S_5=3)}{P(S_{10}=6)}=\frac{\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2\cdot\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2}{\binom{10}{6}\theta^6(1-\theta)^4},$$

in quanto, sapendo che nelle prime 5 giornate si sono avuti 3 successi, il calcolo della probabilità dell'evento $\{S_{10}=6\}$ si riduce a calcolare la probabilità che sulle successive 5 giornate si ottengano (altri) 3 successi, ovvero $P(S_{10}=6|S_5=3)=\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2$. Di conseguenza

$$P(S_5=3|S_{10}=6)=\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{3}}{\binom{10}{6}}=\frac{10\cdot 10}{\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}=\frac{10\cdot 10\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{10}{3\cdot 7}=\frac{10}{21}.$$

Alternativamente, posto $S_5'=S_{10}-S_5$, il numero di successi ottenuti nelle cinque giornate dalla sesta alla decima incluse, si ha che $S_5'$ ed $S_5$ sono indipendenti e con la stessa distribuzione, inoltre

$$\{S_5=3\}\cap\{S_{10}=6\}=\{S_5=3\}\cap\{S_5'=3\}$$

e quindi

$$P(S_5=3|S_{10}=6)=\frac{P\left(\{S_5=3\}\cap\{S_{10}=6\}\right)}{P(S_{10}=6)}=\frac{P\left(\{S_5=3\}\cap\{S_5'=3\}\right)}{P(S_{10}=6)}$$

$$=\frac{P\left(\{S_5=3\}\right)\cdot P\left(\{S_5'=3\}\right)}{P(S_{10}=6)}=\frac{\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2\cdot\binom{5}{3}\theta^3(1-\theta)^2}{\binom{10}{6}\theta^6(1-\theta)^4}$$

$$= \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{5}{3}}{\binom{10}{6}} = \frac{10 \cdot 10}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{10 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{10}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

**Esercizio 2.** Consideriamo un gioco in cui si lancia prima una moneta ben equilibrata e poi si lanciano due dadi ben equilibrati. Il punteggio realizzato dipende, oltre che dai valori ottenuti con i dadi, anche dal risultato del lancio della moneta secondo il seguente schema: se esce testa il punteggio è pari al valore del primo dado, se esce croce il punteggio è pari al minimo dei valori dei due dadi.

Si ponga $T$ l'evento $\{$*esce testa*$\}$, $C$ l'evento $\{$*esce croce*$\}$ ed $A$ l'evento $\{$*si ottiene un punteggio maggiore o uguale a 5*$\}$

**a) Calcolare la probabilità di $A$.**
**soluzione di a):** $P(A) = \frac{2}{9}$

Infatti, gli eventi $T$ e $C$ formano una partizione dell'evento certo, e quindi, per la formula delle proabilità totali si ha

$$P(A) = P(T)P(A|T) + P(C)P(A|C) = \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) \geq 5)$$

$$= \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5, X_2 \geq 5) = \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(X_1 \geq 5)P(X_2 \geq 5)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9},$$

dove si è posto $X_i$ il valore del dado $i$, per $i = 1, 2$.

**b) (i) Sapendo che si è verificato l'evento $A$, calcolare la probabilità che sia uscita testa.**

**(ii) Sapendo che si è verificato l'evento $A$, calcolare la probabilità che sia uscita croce.**

**soluzione di b): (i)** $P(T|A) = \frac{3}{4}$ **(ii)** $P(C|A) = \frac{1}{4}$

Infatti per la formula di Bayes

$$P(T|A) = \frac{P(T)P(A|T)}{P(T)P(A|T) + P(C)P(A|C)} = \frac{\frac{1}{2}P(X_1 \geq 5)}{\frac{1}{2}P(X_1 \geq 5) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) \geq 5)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Infine $P(C|A) = 1 - P(T|A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

**c) Posto $X$ il punteggio ottenuto, calcolare la distribuzione di $X$.**

**soluzione di c):**

| $X$ | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P(X = k)}$ | $\frac{17}{72}$ | $\frac{15}{72}$ | $\frac{13}{72}$ | $\frac{11}{72}$ | $\frac{9}{72}$ | $\frac{7}{72}$ |

Infatti $X$ assume solo i valori interi da 1 a 6 e

$$P(X = k) = P(T)P(X = k|T) + P(C)P(X = k|C) = \frac{1}{2}P(X_1 = k) + \frac{1}{2}P(\min(X_1, X_2) = k)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\big(P(X_1 = k, X_2 > k) + P(X_1 > k, X_2 = k) + P(X_1 = k, X_2 = k)\big)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\big(P(X_1 = k)P(X_2 > k) + P(X_1 > k)P(X_2 = k) + P(X_1 = k)P(X_2 = k)\big)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6} \cdot \frac{6-k}{6} + \frac{6-k}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{12}\left(1 + 2\frac{6-k}{6} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{19 - 2k}{6} = \frac{19 - 2k}{72}.$$

(come verifica si noti che $\sum_{k=1}^{6} \frac{19-2k}{72} = \frac{1}{72}(17+15+13+11+9+7) = \frac{1}{72}3 \cdot 24 = 1$)
Inoltre va sottolineato che $P(\min(X_1, X_2) = k)$ si puo' calcolare anche con la formula $P(\min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 = k, X_2 \geq k) + P(X_1 \geq k, X_2 = k) - P(X_1 = k, X_2 = k)$, oppure con la formula $P(\min(X_1, X_2) = k) = P(X_1 \geq k, X_2 \geq k) - P(X_1 \geq k+1, X_2 \geq k+1)$.

**d) Calcolare il valore atteso di $X$.**
**soluzione di d):** $\mathbb{E}(X) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72}$

Infatti

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{6} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{6} k\frac{19-2k}{72} = \frac{1}{72}(1 \cdot 17 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 7)$$

$$= \frac{1}{72}(17 + 30 + 39 + 44 + 45 + 42) = \frac{217}{72} = 3 + \frac{1}{72} \simeq 3,01388$$

**Esercizio 3.** Siano $A$ e $B$ due eventi indipendenti con probabilità $p_A$ e $p_B$ rispettivamente.

**a) Calcolare $P(A|A \cup B)$.**
**soluzione di a):** $P(A|A \cup B) = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$

Infatti

$$P(A|A \cup B) = \frac{P\big(A \cap (A \cup B)\big)}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

ed essendo $A$ e $B$ indipendenti si ha

$$P(A|A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B) - P(A)P(B)} = \frac{p_A}{p_A + p_B - p_A \cdot p_B}$$

Si considerino le variabili aleatorie binarie $X_A = \mathbf{1}_A$ e $X_B = \mathbf{1}_B$, funzioni indicatrici di $A$ e $B$ rispettivamente. Sia infine

$$W = X_A + X_B = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B.$$

**b) Esprimere gli eventi $\{W = 0\}$, $\{W = 1\}$, $\{W = 2\}$ e $\{W \geq 1\}$ attraverso gli eventi $A$, $\overline{A}$, $B$, $\overline{B}$ e calcolare la distribuzione di $W$.**
**soluzione di b):** $\{W = 0\} = \overline{A} \cap \overline{B}$**,** $\{W = 1\} = (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$**,** $\{W = 2\} = A \cap B$ **e** $\{W \geq 1\} = A \cup B$ **e di conseguenza**

$$P(W = 0) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = (1 - p_A)(1 - p_B) = 1 - p_A - p_B + p_A p_B$$
$$P(W = 1) = P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = (1 - p_A)\,p_B + p_A\,(1 - p_B) = p_A + p_B - 2\,p_A p_B$$
$$P(W = 2) = 1 - \big(P(W = 0) + P(W = 1)\big) = P(A \cap B) = p_A p_B$$

(verifica: $P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2) = (1 - p_A)(1 - p_B) + (1 - p_A)\,p_B + p_A\,(1 - p_B) + p_A p_B = 1 - p_B - p_A(1 - p_B) + (1 - p_A)\,p_B + p_A\,(1 - p_B) + p_A p_B = 1 - p_B + p_B - p_A p_B + p_A p_B = 1$)

**c) Calcolare la distribuzione congiunta di $X_A$ e $W$.**

**soluzione di c):**

| $X \diagdown W$ | **0** | **1** | **2** |
|---|---|---|---|
| **0** | $(1 - p_A)(1 - p_B)$ | $(1 - p_A)p_B$ | 0 |
| **1** | 0 | $p_A(1 - p_B)$ | $p_A p_B$ |

Infatti

$$P(X_A=0,W=0)=P\big(\overline{A}\cap(\overline{A}\cap\overline{B})\big)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=(1-p_A)(1-p_B);$$
$$P(X_A=0,W=1)=P\big(\overline{A}\cap[(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})]\big)=P(\overline{A}\cap B)=(1-p_A)p_B;$$
$$P(X_A=0,W=2)=P\big(\overline{A}\cap(A\cap B)\big)=P(\emptyset)=0;$$

$$P(X_A=1,W=0)=P\big(A\cap(\overline{A}\cap\overline{B})\big)=P(\emptyset)=0;$$
$$P(X_A=1,W=1)=P\big(A\cap[(\overline{A}\cap B)\cup(A\cap\overline{B})]\big)=P(A\cap\overline{B})=p_A(1-p_B);$$
$$P(X_A=1,W=2)=P\big(A\cap(A\cap B)\big)=P(A\cap B))=p_A\,p_B;$$

**d) Calcolare (i)** $P(X_A=1|W\geq 1)$, **(ii)** $P(X_A=1|W=1)$.
**soluzione di d): (i)** $P(X_A=1|W\geq 1)=P(A|A\cup B)=\frac{p_A}{p_A+p_B-p_A\cdot p_B}$ **(ii)** $P(X_A=1|W=1)=\frac{p_A(1-p_B)}{p_A(1-p_B)+(1-p_A)p_B}=\frac{p_A-p_A\,p_B}{p_A+p_B-2\,p_A\,p_B}$

**e) Calcolare approssimativamente** $p_A=P(A)$**,** $p_B=P(B)$**, nel caso in cui** $A=\{X>1.88\}$ **e** $B=\{Y\leq 0\}$**, dove** $X$ **ed** $Y$ **sono due variabili aleatorie indipendenti, con** $X$ **gaussiana di valore atteso** $\mu=1$ **e varianza** $\sigma^2=4$ **ed** $Y$ **gaussiana standard.**
**soluzione di e):** $P(A)\simeq 0.33$ $\quad P(B)=0.5$

Infatti, essendo $X$ una variabile aleatoria di legge gaussiana con valore atteso $\mu=1$ e varianza $\sigma^2=4=2^2$, la variabile aleatoria $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-1}{2}$ ha legge gaussiana standard, e quindi

$$P(A)=P(X>1.88)=P(\tfrac{X-1}{2}>\tfrac{1.88-1}{2})=P(Z>0.44)\simeq 1-0.67=0.33.$$

Invece il calcolo di $P(Y\geq 0)=\frac{1}{2}$ è un calcolo esatto, in quanto $Y$ è una gaussiana standard e $P(Y\geq 0)=\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\,e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy=\frac{1}{2}$.
**f) Spiegare il motivo per cui** $A=\{X>1.88\}$ **e** $B=\{Y\leq 0\}$ **sono indipendenti e calcolare approssimativamente** $P(X_A=1|W\geq 1)$.
**soluzione di f): Gli eventi** $A$ **e** $B$ **si possono scrivere come** $A=\{X>1.88\}=\{X\in I\}$ **e** $B=\{Y\geq 0\}=\{Y\in J\}$**, per gli intervalli (non limitati)** $I=(1.88,\infty)$ **e** $J=[0,\infty)$**, le variabili aleatorie** $X$ **ed** $Y$ **sono indipendenti, e quindi** $P(X\in I, Y\in J)=P(X\in I)P(Y\in J)$**, ovvero** $A$ **e** $B$ **sono indipendenti. Inoltre dal precedente punto d) sappiamo che**

$$P(X_A=1|W\geq 1)=P(A|A\cup B)=\frac{p_A}{p_A+p_B-p_A\cdot p_B}\simeq\frac{\frac{33}{100}}{\frac{33}{100}+\frac{1}{2}-\frac{33}{100}\frac{1}{2}}$$

$$P(X_A=1|W\geq 1)\simeq\frac{\frac{33}{100}}{\frac{33}{100}+\frac{50}{100}-\frac{33}{200}}=\frac{\frac{66}{200}}{\frac{66}{200}+\frac{100}{200}-\frac{33}{200}}=\frac{66}{66+100-33}=\frac{66}{133}\simeq 0.49624$$

**Esercizio 4.** Sia $X$ una variabile aleatoria con densità

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{per} \quad x<-1\\ c\left(1+x^3\right) & \text{per} \ -1\leq x<0\\ c\left(1-x^3\right) & \text{per} \quad 0\leq x<1\\ 0 & \text{per} \quad x\geq 1\end{cases}$$

**a) Trovare il valore di $c$ e disegnare il grafico di $f_X$.**
**soluzione di a):** $c = \frac{2}{3}$

Infatti

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{0} f_X(x)\, dx + \int_{0}^{1} f_X(x)\, dx \\
&= c\left(\int_{-1}^{0}(1+x^3)\, dx + \int_0^1 (1-x^3) dx\right) = c\left(\left[x+\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= c\left(0-(-1)-\frac{(-1)^4}{4}+1-\frac{1^4}{4}-0\right) = c\left(1-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4}\right) \\
&= c\,2\,\frac{3}{4} = c\,\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

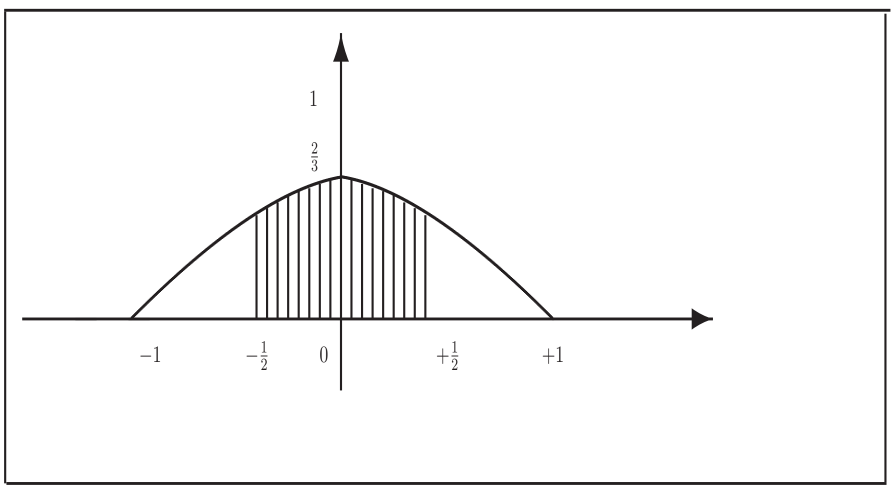


Figura 1: Grafico di $f_X(x)$. L'area tratteggiata rappresenta $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

Alternativamente, il grafico di $f_X$ deve essere del tipo in figura 2.

Si vede immediatamente (e si può verificare anche analiticamente) che la funzione $f_X$ è simmetrica rispetto all'asse $x = 0$, ovvero che $f_X(-x) = f_X(x)$, e quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx &= 2\int_0^1 f_X(x)\, dx \\
&= 2\,c\int_0^1 (1-x^3) dx = 2\,c\left[x-\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 2\,c\,1-\frac{1^4}{4}-0 = 2\,c\left(1-\frac{1}{4}\right) \\
&= 2\,c\,\frac{3}{4} = c\,\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

**b) Calcolare** $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.
**soluzione di b):** $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) = \frac{31}{48} \simeq 0.64583.$

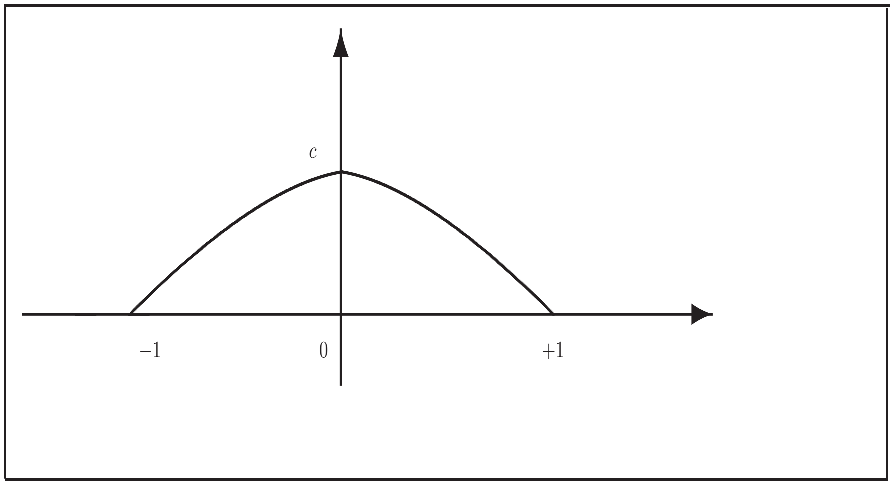

Figura 2: Grafico di $f_X(x)$, prima di calcolare il valore di $c$

Infatti in generale se $X$ ammette densità di probabilità $f_X(x)$ allora

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f_X(x)\,dx,$$

quindi

$$\begin{aligned}
P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} f_X(x)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx \\
&= c\left(\int_{-\frac{1}{2}}^{0} (1+x^3)\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^3)dx\right) = c\left(\left[x + \frac{x^4}{4}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + \left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}}\right) \\
&= c\left(0 - \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^4}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0\right) = c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64} + \frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right) \\
&= c\,\frac{31}{32} = \frac{2}{3}\cdot\frac{31}{32} = \frac{31}{48} \simeq 0.64583.
\end{aligned}$$

Alternativamente, anche qui, sfruttando la simmetria di $f_X$ si possono semplificare i calcoli:

$$\begin{aligned}
P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} f_X(x)\,dx \\
&= 2\,c\int_0^{\frac{1}{2}} (1-x^3)dx = c\left[x - \frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \\
&= 2\,c\left(\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4}{4} - 0\right) = 2\,c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{64}\right) \\
&= 2\,c\,\frac{31}{64} = \frac{2}{3}\cdot\frac{31}{32} = \frac{31}{48} \simeq 0.64583.
\end{aligned}$$

**c) Calcolare $\mathbb{E}(X)$ (attenzione: è possibile trovarlo senza fare calcoli?).**
**soluzione di c):** $\mathbb{E}(X) = 0$

Infatti

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f_X(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x\, f_X(x)\, dx + \int_{0}^{1} x\, f_X(x)\, dx \\
&= c\left(\int_{-1}^{0} x\,(1+x^3)\, dx + \int_{0}^{1} x\,(1-x^3) dx\right) = c\left(\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_{x=0}^{x=1}\right) \\
&= c\left(0 - \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^5}{5} + \frac{1^2}{2} - (\frac{1^5}{5} - 0)\right) = c\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Del resto basta osservare che la densità è simmetrica rispetto allo zero per ottenere immediatamente che il valore atteso è nullo[3]. Infatti si tratta di integrare la funzione $g(x) = x\, f_X(x)$ che è una funzione dispari: $g(-x) = -x\, f_X(-x) = -x\, f_X(x) = -g(x)$
Si noti che per ottenere questo risultato, non è stato necessario utilizzare il valore di $c$.

[3] In realtà ciò vale in quanto l'integrale del valore assoluto è finito, cioè $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\, dx < \infty$. Infatti in questo caso, essendo $|x|\, f_X(x) \leq f_X(x)$ per $|x| \leq 1$, e $|x|\, f_X(x) = 0$ per $|x| > 1$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\, f_X(x)\, dx \leq \int_{-1}^{+1} |x|\, f_X(x)\, dx \leq \int_{-1}^{+1} f_X(x)\, dx = 1 < \infty.$$