Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1

A. A. 2004/2005

2^a prova in itinere (08/06/2005)(docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

La prova scritta consiste nello svolgimento degli Esercizi 1 e 2 e di uno, a scelta dallo studente, fra gli esercizi 3 e 4. (tempo a disposizione: 3 ore)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $\alpha > 0$, ammette una densità della forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\alpha} & \text{per } -\alpha \leq x \leq 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{per } 0 \leq x \leq \alpha \\ 0 & \text{per } |x| > \alpha \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α.

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

c) Calcolare $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\}$.

Esercizio 2. Un ristorante (in cui è obbligatoria la prenotazione) propone i tre "*menù*" $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ al costo di 14 Euro, 21 Euro e 24 Euro, rispettivamente.

Si suppone che ciascun cliente scelga fra $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$ con probabilità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{6}$, rispettivamente; si suppone inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra le scelte dei diversi clienti.

Per la serata sono prenotati 200 clienti ed indichiamo con S_{200} l'incasso in Euro che verrà realizzato complessivamente dal ristorante nella serata.

a) Determinare il valore atteso e la varianza di S_{200}

b) Calcolare l'approssimazione normale per le probabilità

b1) $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\}$ b2) $P\{S_{200} > 3800\}$.

Esercizio 3. Riprendendo le posizioni del precedente Esercizio 2, indichiamo con X_j il numero di clienti che scelgono il menù $\mathcal{M}_j$ (per $j = 1, 2, 3$).

Scrivere le formule per il calcolo delle seguenti probabilità

a) $P\big(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10\big)$

b) $P\big(X_1 = 150\big)$

c) $P\big(X_2 = 40 | X_1 = 150\big)$.

Esercizio 4. Consideriamo un gioco d'azzardo eseguito con due monete non perfette: una moneta dà risultato testa con probabilità $0,4$ e l'altra dà risultato testa con probabilità $0,6$.

Viene scelta una moneta, e poi la moneta scelta (sempre la stessa) viene lanciata tre volte consecutivamente .

Si vincono 10 Euro se si presentano almeno due risultati testa consecutivi;

si vincono 5 Euro se si presentano esattamente due risultati testa non consecutivi;

non si vince nulla negli altri casi.

a1) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro **nel caso in cui** si scelga la moneta più favorevole

b1) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora **nel caso in cui** si scelga la moneta più favorevole.

a2) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro **nel caso in cui** la moneta viene **scelta a caso** fra le due.

b2) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora **nel caso in cui** la moneta viene **scelta a caso** fra le due.

c) **(facoltativo) Sempre nel caso in cui** la moneta sia stata **scelta a caso** fra le due, si calcoli la probabilità che esca testa al secondo lancio, **sapendo che** il risultato del primo lancio è stato testa.

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Calcolo delle Probabilità 1

Seconda prova in itinere, mercoledì 8 giugno 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME ....

docente G. Nappo ☐ F. Spizzichino ☐

Esercizio 1.

a) α=............................

b) $E(X)$ =........................... $Var(X)$ =..................................

c) $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\}$ =............................

Esercizio 2.

a) $E(S_{200})$ =........................... $Var(S_{200})$ =..................................

b1) $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} \simeq$ ....

b2) $P\{S_{200} > 3800\} \simeq$ ....

Esercizio 3.

a) $P\big(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10\big)$ =..

b) $P\big(X_1 = 150\big)$ = ...

c) $P\big(X_2 = 40 | X_1 = 150\big)$ = ...

Esercizio 4.

a1) Probabilità di vincere 10 Euro =............................(scelta la moneta più favorevole)

b1) Valore atteso della vincita = ... (scelta la moneta più favorevole)

a2) Probabilità di vincere 10 Euro =............................(scelta a caso delle monete)

b2) Valore atteso della vincita = ... (scelta a caso delle monete)

c) **(facoltativo)** p_c =............................

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1

A. A. 2004/2005

Soluzioni della 2^a prova in itinere (08/06/2005)(docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Esercizio 1. ***X è una variabile aleatoria tale che, per un'opportuna costante $\alpha > 0$, ammette una densità della forma***

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{\alpha} & \text{per } -\alpha \le x \le 0 \\ \frac{x}{\alpha} & \text{per } 0 \le x \le \alpha \\ 0 & \text{per } |x| > \alpha \end{cases}$$

a) Determinare il valore di α.

Soluzione: $\alpha = 1$

Infatti α va determinato in modo che f sia una densità di probabilità, ossia in modo che

i) $f(x) \ge 0$ per ogni x (e questo è automaticamente soddisfatto), e che

ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, ossia, nel nostro caso

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{\alpha}\,|x|\,dx = 2\int_0^{+\alpha} \frac{1}{\alpha}\,x\,dx = \frac{1}{\alpha}\,x^2\Big|_0^{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\,\alpha^2 = \alpha = 1$$

b) Calcolare il valore atteso e la varianza di X.

Soluzione: $E(X) = 0$ e $Var(X) = \frac{1}{2}$

Infatti $E(X) = 0$ in quanto la densità è simmetrica rispetto all'origine e X ammette sicuramente valore atteso finito, in quanto $|X| \le 1$. Alternativamente

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x|x|\,dx = \int_{-1}^{0} (-x^2)\,dx + \int_0^1 x^2\,dx = -\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$
$$= -\left(0 - \frac{(-1)^3}{3}\right) + \left(\frac{1^3}{3} - 0\right) = -\frac{1^3}{3} + \frac{1^3}{3} = 0$$

Di conseguenza $Var(X) = E(X^2)$ e quindi

$$Var(X) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} x^2|x|\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1^4}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

c) Calcolare $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\}$.

Soluzione: $P\{|X| > \frac{\alpha}{2}\} = P\{|X| > \frac{1}{2}\} = \frac{3}{4}$

Infatti

$$P\{|X| > \tfrac{1}{2}\} = 1 - P\{|X| \le \tfrac{1}{2}\} = 1 - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |x|\,dx = 1 - 2\int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = 1 - \Big[x^2\Big]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{3}{4}$$

Esercizio 2. ***Un ristorante (in cui è obbligatoria la prenotazione) propone i tre "menù" $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ al costo di 14 Euro, 21 Euro e 24 Euro, rispettivamente.***

Si suppone che ciascun cliente scelga fra $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ e $\mathcal{M}_3$ con probabilità $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{6}$, rispettivamente; si suppone inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra le scelte dei diversi clienti.

Per la serata sono prenotati 200 clienti ed indichiamo con S_{200} l'incasso in Euro che verrà realizzato complessivamente dal ristorante nella serata.

a) Determinare il valore atteso e la varianza di S_{200}

Soluzione: $E(S_{200}) = 3600$ e $Var(S_{200}) = 3400$

Infatti per iniziare si noti che S_{200} si può pensare come la somma di duecento variabili aleatorie V_i, dove V_i rappresenta il prezzo del menù scelto dal cliente i-simo. Dai dati del problema si ha che V_i può assumere i valori 14, 21 e 24, con

$$P(V_i = 14) = \tfrac{1}{2}, \qquad P(V_i = 21) = \tfrac{1}{3}, \qquad P(V_i = 24) = \tfrac{1}{6},$$

per cui

$$\begin{aligned} E(S_{200}) &= E(V_1 + \cdots + V_{200}) = E(V_1) + \cdots + E(V_{200}) = 200\, E(V_1) \\ &= 200\left(14\,\tfrac{1}{2} + 21\,\tfrac{1}{3} + 24\,\tfrac{1}{6}\right) = 200\big(7 + 7 + 4\big) = 200 \cdot 18 = 3600. \end{aligned}$$

Inoltre, sempre dai dati del problema sappiamo che le variabili V_i sono indipendenti e quindi

$$\begin{aligned} Var(S_{200}) &= Var(V_1 + \cdots + V_{200}) = Var(V_1) + \cdots + Var(V_{200}) = 200\, Var(V_1) \\ &= 200\left(E(V_1^2) - \big(E(V_1)\big)^2\right) \\ &= 200\left(\left(14^2\,\tfrac{1}{2} + 21^2\,\tfrac{1}{3} + 24^2\,\tfrac{1}{6}\right) - 18^2\right) = 200\left(\left(14 \cdot 7 + 21 \cdot 7 + 24 \cdot 4\right) - 18^2\right) \\ &= 200\left(35 \cdot 7 + 96 - 81 \cdot 4\right) = 200\left(5 \cdot 49 + 96 - 324\right) = 200\big(245 + 96 - 324\big) = 200\big(341 - 324\big) \\ &= 200 \cdot 17 = 3400 \end{aligned}$$

b) Calcolare l'approssimazione normale per le probabilità

b1) $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\}$ ***b2)*** $P\{S_{200} > 3800\}$***.***

Soluzione: $P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} \simeq 0,9128$ e $P\{S_{200} > 3800\} \simeq 0,0003$.

Infatti

$$\begin{aligned} P\{3500 \leq S_{200} \leq 3700\} &= P\{\tfrac{3500-3600}{\sqrt{3400}} \leq \tfrac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \tfrac{3700-3600}{\sqrt{3400}}\} \\ &= P\{-\tfrac{-10}{\sqrt{34}} \leq \tfrac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \tfrac{10}{\sqrt{34}}\} \\ &\simeq \Phi\left(\tfrac{10}{5{,}83}\right) - \Phi\left(-\tfrac{10}{5{,}83}\right) = 2\,\Phi\left(\tfrac{10}{5{,}83}\right) - 1 \\ &\simeq 2\,\Phi(1,71) - 1 = 2 \cdot 0.9564 - 1 = 0,9128 \end{aligned}$$

Invece

$$\begin{aligned}
P\{S_{200} > 3800\} &= P\{\tfrac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} > \tfrac{3800-3600}{\sqrt{3400}}\}\\
&= 1 - P\{\tfrac{S_{200}-3600}{\sqrt{3400}} \leq \tfrac{20}{\sqrt{34}}\}\\
&\simeq 1 - \Phi\left(\tfrac{20}{5{,}83}\right) =\simeq 1 - \Phi(3,43) = 1 - 0.9997 = 0,0003
\end{aligned}$$

Esercizio 3. ***Riprendendo le posizioni del precedente Esercizio 2, indichiamo con X_j il numero di clienti che scelgono il menù $\mathcal{M}_j$ (per $j = 1, 2, 3$).***

Scrivere le formule per il calcolo delle seguenti probabilità

a) $P\big(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10\big)$

Soluzione: Si tratta di 200 prove indipendenti a tre esiti: quindi la distribuzione congiunta di (X_1, X_2, X_3) è una distribuzione multinomiale e

$$P\big(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10\big) = \frac{200!}{150!\,40!\,10!}\,\left(\tfrac{1}{2}\right)^{150}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{40}\left(\tfrac{1}{6}\right)^{10}.$$

b) $P\big(X_1 = 200\big)$

Soluzione: Si tratta di 200 prove indipendenti a due esiti menù da 14 Euro (con probabilità $\frac{1}{2}$) o no: quindi la variabile X_1 ha distribuzione binomiale di parametri $n = 200$ e $p = \frac{1}{2}$, così

$$P\big(X_1 = 150\big) = \binom{200}{150}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{200} = \frac{200!}{150!\,50!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{200}$$

c) $P\big(X_2 = 40 | X_1 = 150\big)$.

Soluzione: $P\big(X_2 = 40|X_1 = 150\big) = \frac{50!}{40!\,10!}\left(\frac{2}{3}\right)^{40}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

Infatti

$$P\big(X_2 = 40|X_1 = 150\big) = \frac{P\big(X_1 = 150, X_2 = 40\big)}{P\big(X_1 = 150\big)} = \frac{P\big(X_1 = 150, X_2 = 40, X_3 = 10\big)}{P\big(X_1 = 150\big)}$$

$$= \frac{\frac{200!}{150!\,40!\,10!}\left(\frac{1}{2}\right)^{150}\left(\frac{1}{3}\right)^{40}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\frac{200!}{150!\,50!}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}} = \frac{50!}{40!\,10!}\,\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{40}\left(\frac{1}{6}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{50}} = \frac{50!}{40!\,10!}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{40}\left(\tfrac{1}{3}\right)^{10}$$

Esercizio 4. ***Consideriamo un gioco d'azzardo eseguito con due monete non perfette: una moneta dà risultato testa con probabilità*** $0,4$ ***e l'altra dà risultato testa con probabilità*** $0,6$.

Viene scelta una moneta, e poi la moneta scelta (sempre la stessa) viene lanciata tre volte consecutivamente.

Si vincono 10 Euro se si presentano almeno due risultati testa consecutivi;

si vincono 5 Euro se si presentano esattamente due risultati testa non consecutivi;

non si vince nulla negli altri casi.

a1) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro nel caso in cui si scelga la moneta più favorevole Soluzione: La probabilità cercata vale 0.504.
Infatti, posto X la variabile aleatoria che rappresenta la vincita, $T_i = \{esce\ testa\ all'i\text{-}simo\ lancio\}$, per $i = 1, 2, 3$, ed infine posta P_1 la probabilità nel caso in cui venga scelta la moneta più favorevole

$$\begin{aligned}
P_1(X = 10) &= P_1(T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3) + P_1(T_1 \cap T_2 \cap T_3) \\
&= P_1(T_1)P_1(T_2)P_1(\overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1)P_1(T_2)P_1(T_3) + P_1(T_1)P_1(T_2)P_1(T_3) \\
&= (0.6)^2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot (0.6)^2 + (0.6)^3 = (0.6)^2\big(0.4 + 0.4 + 0.6\big) \\
&= 0.36 \cdot 1.4 = 0.504
\end{aligned}$$

b1) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora nel caso in cui si scelga la moneta più favorevole. Soluzione: Il valore atteso cercato vale 5.76.
Infatti in modo analogo si ha che[1]

$$\begin{aligned}
P_1(X = 5) = P_1(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) &= P_1(T_1)P_1(\overline{T}_2)P_1(T_3) \\
&= 0.6 \cdot 0.4 \cdot 0.6 = (0.6)^2 \cdot 0.4 = 0.36 \cdot 0.4 = 0.144
\end{aligned}$$

e quindi

$$E_1(X) = 0\, P_1(X = 0) + 5\, P_1(X = 5) + 10\, P_1(X = 10) = 5 \cdot 0.144 + 10 \cdot 0.504 = 0.720 + 5.04 = 5.76$$

a2) Calcolare la probabilità di vincere 10 Euro nel caso in cui la moneta viene scelta a caso fra le due. Soluzione: La probabilità cercata vale 0.38.
Infatti posto
$A_1 = \{viene\, scelta\, la\, moneta\, più\, favorevole\}$ e $A_2 = \{viene\, scelta\, la\, moneta\, meno\, favorevole\}$ si ha

$$P(X = 10) = P(A_1)\, P(X = 10|A_1) + P(A_2)\, P(X = 10|A_2),$$

[1] In modo analogo si può calcolare anche $P_1(X = 0)$:

$$\begin{aligned}
P_1(X = 0) &= P_1(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3) + P_1(\overline{T}_1 \cap \overline{T}_2 \cap \overline{T}_3) \\
&= P_1(T_1)P_1(\overline{T}_2)P_1(\overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1)P_1(T_2)P_1(\overline{T}_3) + P_1(\overline{T}_1)P_1(\overline{T}_2)P_1(T_3) + P_1(\overline{T}_1)P_1(\overline{T}_2)P_1(\overline{T}_3) \\
&= 3 \cdot (0.4)^2 \cdot 0.6 + (0.4)^3 = (0.4)^2\big(3 \cdot 0.6 + 0.4\big) = 0.16 \cdot 2.2 = 0.352
\end{aligned}$$

Tuttavia va notato che questo calcolo non è necessario per due motivi: prima di tutto perché il valore di $P_1(X = 0)$ non interviene nel calcolo per ottenere il valore atteso di X, e poi perché comunque il valore di $P_1(X = 0)$ si può ottenere

$$P_1(X = 0) = 1 - P_1(X = 5) - P_1(X = 10) = 1 - 0.144 - 0.504 = 1 - 0.648 = 0.352$$

con $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ e con

$$\begin{aligned}
P(X=10|A_1) &= P(T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3|A_1) + P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3|A_1) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3|A_1)\\
&= P(T_1|A_1)P(T_2|A_1)P(\overline{T}_3|A_1) + P(\overline{T}_1|A_1)P(T_2|A_1)P(T_3|A_1) + P(T_1|A_1)P(T_2|A_1)P(T_3|A_1)\\
&= (0.6)^2 \cdot 0.4 + 0.4 \cdot (0.6)^2 + (0.6)^3 = (0.6)^2\big(0.4 + 0.4 + 0.6\big) = \cdot 0.36 \cdot 1.4\\
&= 0.504
\end{aligned}$$

$\big($del resto $P(X=10|A_1) = P_1(X=10)\big)$, mentre

$$\begin{aligned}
P(X=10|A_2) &= P(T_1 \cap T_2 \cap \overline{T}_3|A_2) + P(\overline{T}_1 \cap T_2 \cap T_3|A_2) + P(T_1 \cap T_2 \cap T_3|A_2)\\
&= P(T_1|A_2)P(T_2|A_2)P(\overline{T}_3|A_2) + P(\overline{T}_1|A_2)P(T_2|A_2)P(T_3|A_2) + P(T_1|A_2)P(T_2|A_2)P(T_3|A_2)\\
&= (0.4)^2 \cdot 0.6 + 0.6 \cdot (0.4)^2 + (0.4)^3 = (0.4)^2\big(0.6 + 0.6 + 0.4\big)0.16 \cdot 1.6\\
&= 0.256
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
P(X=10) &= P(A_1)\,P(X=10|A_1) + P(A_2)\,P(X=10|A_2)\\
&= \tfrac{1}{2} \cdot 0.504 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.256 = \tfrac{1}{2}\,0.760 = 0.380
\end{aligned}$$

b2) Calcolare il valore atteso della vincita, ancora nel caso in cui la moneta viene scelta a caso fra le due. Soluzione: Il valore atteso cercato vale 4.4.
Infatti si deve calcolare

$$E(X) = 0\,P(X=0) + 5\,P(X=5) + 10\,P(X=10) = 5 \cdot 0.12 + 10 \cdot 0.38 = 0.6 + 3.8 = 4.4$$

in quanto

$$\begin{aligned}
P(X=5) &= P(A_1)\,P(X=5|A_1) + P(A_2)\,P(X=5|A_2)\\
&= \tfrac{1}{2}\,P(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3|A_1) + \tfrac{1}{2}\,P(T_1 \cap \overline{T}_2 \cap T_3|A_2)\\
&= \tfrac{1}{2}\,P(T_1|A_1)P(\overline{T}_2|A_1)P(T_3|A_1) + \tfrac{1}{2}\,P(T_1|A_2)P(\overline{T}_2|A_2)P(T_3|A_2)\\
&= \tfrac{1}{2}\,(0.6)^2 \cdot 0.4 + \tfrac{1}{2}\,(0.4)^2 \cdot 0.6 = \tfrac{1}{2} \cdot 0.4 \cdot 0.6\big(0.6 + 0.4\big) = \tfrac{1}{2} \cdot 0.24\\
&= 0.12
\end{aligned}$$

c) (facoltativo) Sempre nel caso in cui la moneta sia stata scelta a caso fra le due, si calcoli la probabilità che esca testa al secondo lancio, sapendo che il risultato del primo lancio è stato testa.
Soluzione: La probabilità cercata vale 0.52.
Infatti

$$\begin{aligned}
P(T_2|T_1) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} &= \frac{P(A_1)P(T_1 \cap T_2|A_1) + P(A_2)P(T_1 \cap T_2|A_2)}{P(A_1)P(T_1|A_1) + P(A_2)P(T_1|A_2)}\\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot (0.6)^2 + \frac{1}{2} \cdot (0.4)^2}{\frac{1}{2} \cdot 0.6 + \frac{1}{2} \cdot 0.4} = 0.36 + 0.16 = 0.52
\end{aligned}$$