

Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.7

Consegnato mercoledì 4 maggio 2005.

Consegnare le risposte entro mercoledì 11 maggio 2005.

1. Sia X_1 una variabile aleatoria che può assumere i valori $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ e con

$$p_{X_1}(0) = P(X_1 = 0) = \frac{1}{10}, \quad p_{X_1}\left(\frac{1}{2}\right) = P(X_1 = \frac{1}{2}) = \frac{1}{10},$$

$$p_{X_1}(1) = P(X_1 = 1) = \frac{4}{10}, \quad p_{X_1}\left(\frac{3}{2}\right) = P(X_1 = \frac{3}{2}) = \frac{4}{10}.$$

- a) Calcolare il valore atteso μ , la varianza σ^2 e lo scarto standard σ per la variabile X_1
 b) Trovare la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria che si ottiene quale standardizzata di X_1
 c) Siano X_2, X_3, \dots, X_{100} delle variabili aleatorie con la stessa distribuzione di X_1 e tali che tutte le coppie (X_i, X_j) siano indipendenti, per $1 \leq i \neq j \leq 100$ e poniamo

$$Y_{100} \equiv \frac{\sum_{j=1}^{100} X_j}{100}$$

Dare una limitazione inferiore alla probabilità

$$P\left\{\mu - \frac{1}{10} \leq Y_{100} \leq \mu + \frac{1}{10}\right\}.$$

2. Una coppia di dadi perfetti a sei facce viene lanciata n volte ed indichiamo con S_n il numero dei lanci in cui il maggiore fra i due punteggi risulta maggiore o uguale a 5.

Calcolare il minimo valore di n per il quale, in base alla disuguaglianza di Chebishev, si possa scrivere

$$P\left\{\left|\frac{S_n}{n} - \frac{5}{9}\right| > \frac{1}{30}\right\} \leq \frac{1}{10}$$

3. Siano X ed Y sono due variabili aleatorie la cui distribuzione di probabilità congiunta è indicata nella seguente tabella (per entrambe l'insieme dei valori possibili è costituito da $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$):

$Y \backslash X$	-2	-1	0	1	2
-2	0	0.1	0	0	0.05
-1	0.1	0.1	0.05	0	0
0	0	0.05	0	0.125	0
1	0	0	0.125	0.05	0.05
2	0.05	0	0	0.05	0.1

- a) Calcolare il coefficiente di correlazione fra X ed Y .
 b) Calcolare $Cov(2X - 1, -Y)$.

4. a) Calcolare la funzione di distribuzione F_{X_1} della variabile aleatoria X_1 dell'Esercizio 1; disegnare il grafico di F_{X_1} e calcolare¹, con l'ausilio di F_{X_1}

$$P(0 < X_1 \leq 1), \quad P(0 \leq X_1 < 1), \quad P(0.3 \leq X_1 < 1.2), \quad P(0.3 < X_1 \leq 1.2).$$

- b) Siano date le seguenti funzioni

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 0, & \text{per } x \leq 1, & & F_1(x) &= \frac{x}{x+1}, & \text{per } x > 1, \\ F_2(x) &= 0, & \text{per } x < 1, & & F_2(x) &= \frac{x}{x+1}, & \text{per } x \geq 1, \\ F_3(x) &= 0, & \text{per } x < -1, & & F_3(x) &= x, & \text{per } -1 \leq x < 1, & & F_3(x) &= 1, & \text{per } x \geq 1, \\ F_4(x) &= 0, & \text{per } x \leq 0, & & F_4(x) &= x, & \text{per } 0 < x < 1, & & F_4(x) &= 1, & \text{per } x \geq 1, \\ F_5(x) &= x. \end{aligned}$$

Disegnare il grafico di F_i per ogni $i = 1, \dots, 5$; mostrare che F_2 ed F_4 possono essere funzioni di distribuzione (ovvero che soddisfano le condizioni caratterizzanti delle funzioni di distribuzione²), mentre F_1 , F_3 ed F_5 non lo possono essere, giustificando la risposta.

- c) Siano ora Z_i variabili aleatorie con funzione di distribuzione F_i , per $i = 2, 4$. Calcolare $P(Z_i = 1)$ e $P(Z_i = -1)$, per $i = 2, 4$.

¹Si ricordi che, indicando come consueto con $F_X(x^-)$ il limite da sinistra di F , ovvero $F_X(x^-) := \lim_{y \rightarrow x^-} F_X(y)$, si ha $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-)$, e

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) \\ P(a < X < b) &= F_X(b) - F_X(a) - P(X = b) = F_X(b^-) - F_X(a) \\ P(a \leq X < b) &= F_X(b) - F_X(a) - P(X = b) + P(X = a) = F_X(b^-) - F_X(a^-) \\ P(a \leq X \leq b) &= F_X(b) - F_X(a) + P(X = a) = F_X(b) - F_X(a^-). \end{aligned}$$

²Si ricordi che le condizioni caratterizzanti delle funzioni di distribuzione sono:

0. $F(x) \in [0, 1]$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
1. F è monotona non decrescente, cioè crescente in senso lato.
2. F è continua da destra e ammette limiti da sinistra, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.