Calcolo delle Probabilità 1 2004/05 - Laurea triennale
Foglio esercizi n.8

Consegnato mercoledì 11 maggio 2005.
Consegnare le risposte entro mercoledì 18 maggio 2005.

1. Sia Y una variabile aleatoria geometrica[1] (a partire da 1) di parametro p, con $p \in (0,1)$. Sia $n \geq 1$, e si consideri la variabile aleatoria $Y_n := Y \wedge n\big(= \min(Y,n)\big)$.
   a) Calcolare la distribuzione di $Y_n = Y \wedge n$.
   b) Calcolare il valore atteso di $Y_n = Y \wedge n$, utilizzando la formula $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^{n-1} P(X > i)$, valida per variabili aleatorie a valori in $\{0, 1, \ldots, n\}$.
   c) Mostrare che
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(Y \wedge n) = \mathbb{E}(Y) \left(= \frac{1}{p} \right).$$

2. Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda (> 0)$. Si definisca la variabile aleatoria T come la parte intera inferiore di X, cioè
   $$T = \lfloor X \rfloor, \qquad \text{ovvero tale che } T(\omega) = k \Leftrightarrow k \leq X(\omega) < k+1.$$
   a) Mostrare che T è una variabile aleatoria geometrica, a partire da zero, individuandone il parametro.
   b) Calcolare valore atteso di T e varianza di T.
   Posto invece S la parte intera superiore di X, ovvero
   $$S = \lceil X \rceil, \qquad \text{ovvero tale che } S(\omega) = k \Leftrightarrow k-1 < X(\omega) \leq k.$$
   a') Mostrare che S è una variabile aleatoria geometrica, a partire da uno, individuandone il parametro.
   b') Calcolare valore atteso di S e varianza di S.

3. Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità f_X data da
   $$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -1, \\ c|x|^3 & \text{per } -1 < x < 1, \\ 0 & \text{per } x > 1. \end{cases}$$
   a) Trovare il valore di c.
   b) Calcolare e disegnare il grafico di $F_X(x)$, la funzione di distribuzione di X.
   c1) Calcolare valore atteso di X. c2) Calcolare la varianza di X.

   Sia ora $Y = 2X + 1$.
   d1) Calcolare e disegnare il grafico di $f_Y(y)$, la densità di Y. Controllare che
   $$\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy = 1.$$
   d2) Calcolare e disegnare il grafico di $F_Y(y)$, la funzione di distribuzione di Y.

[1] Si ricorda che una v.a. T è Geometrica di parametro p a partire da 0 se e solo se $T(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots.\}$ e
$$P(T = k) = (1-p)^k p \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$
mentre S è Geometrica di parametro p a partire da 1 se e solo se $S(\Omega) = \{1, 2, 3, \ldots.\}$ e
$$P(S = h) = (1-p)^{h-1} p \qquad h = 1, 2, \ldots.$$