Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1

A. A. 2004/2005

prova scritta (11/07/2005)(docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

La prova scritta consiste nello svolgimento dei punti non facoltativi dei seguenti Esercizi. Inoltre, a scelta dallo studente, va svolto almeno uno fra i rimanenti punti facoltativi. (tempo a disposizione: 3 ore)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME.

Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

Esercizio 1. In un torneo di scacchi, Alfredo deve giocare sei partite. L'insieme dei partecipanti è costituito da giocatori di tre livelli: principianti, senior ed esperti. Supponiamo che la probabilità che Alfredo vinca ciascuna singola partita contro un principiante sia uguale al 70%, mentre le analoghe probabilità di vittoria contro giocatori senior ed esperti siano uguali al 50% e al 30%, rispettivamente.

Supponiamo ora che gli avversari di Alfredo siano estratti a caso nell'insieme dei partecipanti e che tale insieme sia costituito da un 60% di principianti, da un 25% di senior, e da un 15% di esperti.

a) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca la prima partita.

b) Come debbono essere valutate le probabilità che il primo avversario sia rispettivamente un principiante, un senior, e un esperto, sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita?

c) (**facoltativo**) Tenendo presente che le estrazioni per determinare gli avversari nelle sei partite avvengono **con reinserimento**, calcolare la probabilità che nelle 6 partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti.

Esercizio 2. All'interno del torneo di scacchi dell'Esercizio 1, Alfredo deve giocare altre partite tutte contro **Benedetto, che è un giocatore esperto**. Si supponga inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra ciascuna partita.

a) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto esattamente 2 volte nelle prime sei partite.

b) Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto almeno 2 volte nelle prime sei partite.

c) Calcolare approssimativamente la probabilità che Alfredo vinca Benedetto in almeno un terzo delle prime 84 partite.

Esercizio 3. Da un'urna che contiene 10 palline di cui 3 rosse e le rimanenti 7 verdi, si estraggono **senza reinserimento** 4 palline. Sia R il numero delle palline rosse estratte.

a) Individuare il tipo di distribuzione di R e mostrare che il valore atteso $E(R)$ vale $\frac{6}{5}$.

Si supponga ora che le palline rosse siano 2 carminio e una porpora, e siano R_c ed R_p le variabili aleatorie che contano il numero di palline rosso carminio e rosso porpora rispettivamente.

Accade che la distribuzione congiunta di R ed R_c sia data dalla seguente tabella:

$R \backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	0	0
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	0
2	0	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$
3	0	0	$\frac{3}{90}$

b) Mostrare che $P(R = 3, R_c = 2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

c) Le variabili aleatorie R ed R_c sono indipendenti?

d) Trovare la distribuzione congiunta di R_c e di R_p, utilizzando la tabella della distribuzione congiunta di R ed R_c ed il fatto che $R_p = R - R_c$.

e) (**facoltativo**) Dimostrare il fatto che la distribuzione congiunta di R ed R_c è individuata dalla tabella precedente.

Esercizio 4. X è una variabile aleatoria con funzione di densità data da

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot \cos x & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

a) Calcolare il valore della costante k

b) Calcolare $P(X > \frac{\pi}{4})$

c) (**facoltativo**) Calcolare il valore atteso di X (**suggerimento**: utilizzare la formula di integrazione per parti)

d) (**facoltativo**) Calcolare la densità di $Y = 2X + \pi$

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Calcolo delle Probabilità 1

prova scritta di lunedì 11 lulgio 2005 - FOGLIO RISPOSTE

NOME E COGNOME ....

docente G. Nappo ☐ F. Spizzichino ☐

Esercizio 1.

a) Probabilità che Alfredo vinca la prima partita ....

b) Sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita, la probabilità che il primo avversario sia un principiante=...................; che sia un senior=.................; che sia un esperto=..................

c) (**facoltativo**) Probabilità che nelle 6 partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti=.......................................

Esercizio 2.

a) Probabilità che Alfredo vinca esattamente 2 delle prime sei partite=...............................

b) Probabilità che Alfredo vinca almeno 2 delle prime sei partite =......................................

c) Probabilità che Alfredo vinca almeno un terzo delle prime 84 partite $\simeq$ ....

Esercizio 3.

a) La distribuzione di R è .... $E(R) = \frac{6}{5}$ mostrato ☐ non mostrato ☐

b) $P(R = 3, R_c = 2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$ mostrato ☐ non mostrato ☐

c) Le variabili aleatorie R ed R_c sono indipendenti ☐ NON sono indipendenti ☐

d) Distribuzione congiunta di R_c e di R_p,

$R_p \backslash R_c$	0	1	2
0			
1			

e) (**facoltativo**) Distribuzione congiunta di R ed R_c mostrato ☐ non mostrato ☐

Esercizio 4.

a) k=.........................

b) $P(X > \frac{\pi}{4})$=.........................

c) (**facoltativo**) Valore atteso di X=..............................

d) (**facoltativo**)

Densità di $Y = 2X + \pi$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} \text{...} \\ \text{...} \\ \text{...} \end{cases}$

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Corso di Calcolo delle Probabilità 1

A. A. 2004/2005

Soluzioni della prova scritta del 11 luglio 2005 (docenti G. Nappo, F. Spizzichino)

Esercizio 1. ***In un torneo di scacchi, Alfredo deve giocare sei partite. L'insieme dei partecipanti è costituito da giocatori di tre livelli: principianti, senior ed esperti. Supponiamo che la probabilità che Alfredo vinca ciascuna singola partita contro un principiante sia uguale al 70%, mentre le analoghe probabilità di vittoria contro giocatori senior ed esperti siano uguali al 50% e al 30%, rispettivamente.***

Supponiamo ora che gli avversari di Alfredo siano estratti a caso nell'insieme dei partecipanti e che tale insieme sia costituito da un 60% di principianti, da un 25% di senior, e da un 15% di esperti.

a) ***Calcolare la probabilità che Alfredo vinca la prima partita.***

Soluzione:

Infatti, posto

$$A_1 = \{\textit{Alfredo vince la prima partita}\},$$

$H_i = \{\textit{il primo avversario di Alfredo è di livello } i\}$, per $i = p,\ s,\ e$ ($p =$principiante, $s =$senior, $e =$ esperto), dai dati del problema si evince che

$$P(A_1|H_p) = \frac{70}{100} = \frac{7}{10} \quad P(A_1|H_s) = \frac{50}{100} = \frac{5}{10} \quad P(A_1|H_e) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$$

$$P(H_p) = \frac{60}{100} \quad P(H_s) = \frac{25}{100} \quad P(H_e) = \frac{15}{100}$$

e quindi si ha

$$\begin{aligned} P(A_1) &= P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e) \\ &= \frac{7}{10}\frac{60}{100} + \frac{5}{10}\frac{25}{100} + \frac{3}{10}\frac{15}{100} = \frac{420+125+45}{1000} = \frac{590}{1000} = \frac{59}{100} \end{aligned}$$

b) ***Come debbono essere valutate le probabilità che il primo avversario sia rispettivamente un principiante, un senior, e un esperto, sapendo che Alfredo ha vinto la prima partita?***

Soluzione: Le probabilità cercate valgono rispettivamente $\frac{420}{590}$, $\frac{125}{590}$, $\frac{45}{590}$

Infatti si tratta di valutare $P(H_i|A_1)$, per $i = p,\ s,\ e$:

$$\begin{aligned} P(H_p|A_1) &= \frac{P(A_1|H_p)P(H_p)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{7}{10}\frac{60}{100}}{\frac{7}{10}\frac{60}{100} + \frac{5}{10}\frac{25}{100} + \frac{3}{10}\frac{15}{100}} \\ &= \frac{7\cdot 60}{7\cdot 60 + 5\cdot 25 + 3\cdot 15} = \frac{420}{590} = \frac{42}{59} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(H_s|A_1) &= \frac{P(A_1|H_s)P(H_s)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{5}{10}\frac{25}{100}}{\frac{7}{10}\frac{60}{100} + \frac{5}{10}\frac{25}{100} + \frac{3}{10}\frac{15}{100}} \\ &= \frac{7\cdot 60}{7\cdot 60 + 5\cdot 25 + 3\cdot 15} = \frac{125}{590} \end{aligned}$$

Per $P(H_e|A_1)$ basta osservare che, essendo $E \to P(E|A_1)$ una probabilità, ed essendo $H_e = \overline{(H_p \cup H_s)}$ deve essere

$$P(H_e|A_1) = 1 - P(H_p|A_1) - P(H_s|A_1) = 1 - \frac{420}{590} - \frac{125}{590} = \frac{45}{590}.$$

Come verifica si può ripetere il conto

$$\begin{aligned} P(H_e|A_1) &= \frac{P(A_1|H_e)P(H_e)}{P(A_1|H_p)P(H_p) + P(A_1|H_s)P(H_s) + P(A_1|H_e)P(H_e)} = \frac{\frac{3}{10}\,\frac{15}{100}}{\frac{7}{10}\,\frac{60}{100} + \frac{5}{10}\,\frac{25}{100} + \frac{3}{10}\,\frac{15}{100}} \\ &= \frac{7 \cdot 60}{7 \cdot 60 + 5 \cdot 25 + 3 \cdot 15} = \frac{45}{590} \end{aligned}$$

c) (facoltativo) ***Tenendo presente che le estrazioni per determinare gli avversari nelle sei partite avvengono con reinserimento, calcolare la probabilità che nelle* 6 *partite Alfredo incontri esattamente due principianti ed esattamente due esperti.***

Soluzione: La probabilità cercata vale $\frac{6!}{2!\,2!\,2!}\left(\frac{60}{100}\right)^2 \left(\frac{25}{100}\right)^2 \left(\frac{15}{100}\right)^2$

Infatti, posto $H_i^{(\ell)} = \{$*l'avversario numero* ℓ *di Alfredo è di livello* $i\}$, per $i = p,\, s,\, e$ (così $H_i = H_i^{(1)}$), la situazione corrisponde alla situazione di 6 prove ripetute ($\ell = 1, 2, ..., 6$) con 3 esiti possibili (p, $s\,e$). Di conseguenza si usa il modello multinomiale, con X_p, X_s ed X_e che corrispondono rispettivamente al numero di avversari principianti, senior ed esperti incontrati da Alfredo nelle 6 partite: essendo $X_p + X_s + X_e = 6$,

$$P(X_p = 2, X_e = 2) = P(X_p = 2,\, X_s = 2,\, X_e = 2) = \frac{6!}{2!\,2!\,2!}\left(\frac{60}{100}\right)^2 \left(\frac{25}{100}\right)^2 \left(\frac{15}{100}\right)^2$$

Esercizio 2. ***All'interno del torneo di scacchi dell'Esercizio 1, Alfredo deve giocare altre partite tutte contro Benedetto, che è un giocatore esperto. Si supponga inoltre che vi sia indipendenza stocastica fra ciascuna partita.***

a) ***Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto esattamente 2 volte nelle prime sei partite.***

Soluzione: La probabilità cercata vale $\frac{15 \cdot 3^2 \cdot 7^4}{10^6}\left(= \frac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^4}{10^6}\right)$.

Infatti basta osservare che si tratta di 6 prove ripetute (ovvero di uno schema di Bernoulli) con probabilità di successo $\theta = \frac{3}{10}$, in quanto Benedetto è un giocatore esperto, e, posto S_n il numero di successi(=vittorie di Alfredo) su n prove(=partite), la probabilità cercata coincide con

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k}\theta^k\,(1-\theta)^{n-k} = \binom{6}{2}\left(\tfrac{3}{10}\right)^2 \left(1 - \tfrac{3}{10}\right)^4 = \tfrac{15 \cdot 3^2 \cdot 7^4}{10^6}\left(= \tfrac{3^3 \cdot 5 \cdot 7^4}{10^6}\right)$$

b) ***Calcolare la probabilità che Alfredo vinca Benedetto almeno 2 volte nelle prime sei partite.***

Soluzione: La probabilità cercata vale $1 - \left(\frac{7}{10}\right)^6 - 6\,\frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^5$.

Infatti, con la stessa notazione del punto precedente, si cerca

$$P(S_n \geq k) = \sum_{h \geq k}\binom{n}{h}\theta^h\,(1-\theta)^{n-h} = 1 - P(S_n < k) = 1 - \sum_{h<k}\binom{n}{h}\theta^h\,(1-\theta)^{n-h},$$

e nel nostro caso

$$P(S_6 \geq 2) = \sum_{2 \geq k} \binom{6}{h} \left(\tfrac{3}{10}\right)^h \left(\tfrac{7}{10}\right)^{6-h} = 1 - P(S_n < 2) = 1 - P(S_6 = 0) - P(S_6 = 1)$$

$$= 1 - \left(\tfrac{7}{10}\right)^6 - 6\,\tfrac{3}{10}\,\left(\tfrac{7}{10}\right)^5$$

$$\left(= 1 - \left(\tfrac{7}{10}\right)^5 \left[\tfrac{7}{10} + \tfrac{3 \cdot 6}{10}\right] = 1 - \left(\tfrac{7}{10}\right)^5 \tfrac{25}{10}\right)$$

c) *Calcolare approssimativamente la probabilità che Alfredo vinca Benedetto in almeno un terzo delle prime* 84 *partite.*
Soluzione:
Infatti si tratta di calcolare

$$P(S_n \geq \tfrac{n}{3}) = P\Big(\tfrac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}} \geq \tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big) = P\Big(S_n^* \geq \tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big)$$

dove si è posto posto S_n^* la standardizzata di S_n. Per l'approssimazione normale, che deriva dal Teorema Centrale del Limite si ha che[1]

$$P\Big(S_n^* \geq \tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big) \simeq P\Big(Z \geq \tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big).$$

Nel nostro caso $\theta = \frac{3}{10}$ ed $n = 84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, da cui la probabilità cercata si può approssimare con

$$1 - \Phi\Big(\tfrac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\tfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right)}{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\tfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{10}{30} - \frac{9}{30}\right)}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{10}}\Big) = 1 - \Phi\left(\tfrac{2}{3}\right) \simeq 1 - \Phi(0,66) \simeq 1 - 0.7454 = 0.2546$$

Esercizio 3. ***Da un'urna che contiene* 10 *palline di cui* 3 *rosse e le rimanenti* 7 *verdi, si estraggono senza reinserimento* 4 *palline. Sia* R *il numero delle palline rosse estratte.***

a) *Individuare il tipo di distribuzione di* R *e mostrare che il valore atteso* $E(R) = \frac{6}{5}$.
Soluzione: La distribuzione di R è di tipo ipergeometrico, e precisamente

$$P(R = i) = \frac{\binom{3}{i} \cdot \binom{7}{4-i}}{\binom{10}{4}}, \qquad \text{per } i = 0, 1, 2, 3$$

[1] Ovviamente si poteva anche notare che

$$P(S_n \geq \tfrac{n}{3}) = 1 - P(S_n < \tfrac{n}{3}) = 1 - P(S_n \leq \tfrac{n}{3} - 1) = 1 - P\Big(S_n^* \leq \tfrac{\frac{n}{3} - 1 - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}\Big)$$

In questo modo, per ottenere l'approssimazione, si sarebbe arrivati invece al calcolo di

$$1 - \Phi\Big(\tfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{10}\right) - 1}{\sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10}}}\Big) = 1 - \Phi\Big(\tfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \left(\frac{10}{30} - \frac{9}{30}\right) - 1}{\frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{10}}\Big) = 1 - \Phi\left(\tfrac{2}{3} - \tfrac{10}{42}\right) \simeq 1 - \Phi(0,43) \simeq 1 - 0.6664 = 0.3336$$

Il motivo della differenza sta nel fatto che $n = 84$ è un numero relativamente piccolo, per cui la differenza di $\sqrt{\frac{1}{n\,\theta\,(1-\theta)}} = \frac{10}{42}$ tra i due calcoli è abbastanza grande. Chiaramente al crescere di n la differenza tra $\frac{\frac{n}{3} - 1 - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}$ e $\frac{\frac{n}{3} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}}$, diviene trascurabile. In realtà dal punto di vista numerico sarebbe meglio, nel caso dell'approssimazione normale delle variabili aleatorie binomiali, come in questo caso, sarebbe bene osservare che

$$P(S_n < k) = P(S_n \leq k - \tfrac{1}{2})$$

e quindi, nel nostro caso, calcolare Φ in $\frac{\frac{n}{3} - \frac{1}{2} - n\theta}{\sqrt{n\,\theta\,(1-\theta)}} = \frac{2}{3} - \frac{10}{84} \simeq 0.547$

per cui

$$P(R=0) = \frac{\binom{3}{0}\cdot\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{4!}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{15}{90} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$P(R=1) = \frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}} = 3\,\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{45}{90} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(R=2) = \frac{\binom{3}{2}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}} = 3\,\frac{7\cdot 6}{2}\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{27}{90} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

e

$$P(R=3) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

Si supponga ora che le palline rosse siano 2 ***carminio e una porpora, e siano*** R_c ***ed*** R_p ***le variabili aleatorie che contano il numero di palline rosso carminio e rosso porpora rispettivamente.***

Accade che la distribuzione congiunta di R ***ed*** R_c ***sia data dalla seguente tabella:***

$R\backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	0	0
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	0
2	0	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$
3	0	0	$\frac{3}{90}$

b) ***Mostrare che*** $P(R=3, R_c=2) = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$

Soluzione: Basta notare che se sono uscite tutte e tre le palline rosse, allora ovviamente sono uscite anche tutte e due le palline carminio e quindi

$$P(R=3, R_c=2) = P(R=3) = \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}} = 7\,\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$$

c) ***Le variabili aleatorie*** R ***ed*** R_c ***sono indipendenti?***

Soluzione: R ed R_c NON sono indipendenti.

Infatti, ad esempio

$$0 = P(R=0,\, R_c=2) \neq P(R=0)\, P(R_c=2) (> 0).$$

d) ***Trovare la distribuzione congiunta di*** R_c ***e di*** R_p***, utilizzando la tabella della distribuzione congiunta di*** R ***ed*** R_c ***ed il fatto che*** $R_p = R - R_c$***.***

Soluzione:

Infatti, considerando che

$R\backslash R_c$	0	1	2
0	$(R_c, R_p) = (0,0)$	$*$	$*$
1	$(R_c, R_p) = (0,1)$	$(R_c, R_p) = (1,0)$	$*$
2	$*$	$(R_c, R_p) = (1,1)$	$(R_c, R_p) = (2,0)$
3	$*$	$*$	$(R_c, R_p) = (2,1)$

si ottiene che

$R_p \backslash R_c$	0	1	2
0	$\frac{15}{90}$	$\frac{30}{90}$	$\frac{3}{90}$
1	$\frac{15}{90}$	$\frac{18}{90}$	$\frac{9}{90}$

e) (facoltativo) ***Dimostrare il fatto che la distribuzione congiunta di*** R ***ed*** R_c ***è individuata dalla tabella precedente.***

Soluzione:

Infatti si tratta in realtà solo di notare che, posto V il numero di palline verdi estratte si ha

$$P(R=0,R_c=0)=P(R_c=0,R_p=0)=P(R_c=0,R_p=0,V=4)=\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{7}{4}}{\binom{10}{4}}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4!}\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{15}{90}$$

$$P(R=1,R_c=0)=P(R_c=0,R_p=1)=P(R_c=0,R_p=1,V=3)=\frac{\binom{2}{0}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}=\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{15}{90}$$

$$P(R=1,R_c=1)=P(R_c=1,R_p=0)=P(R_c=1,R_p=0,V=3)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{7}{3}}{\binom{10}{4}}=2\,\frac{7\cdot6\cdot5}{3!}\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{30}{90}$$

$$P(R=2,R_c=1)=P(R_c=1,R_p=1)=P(R_c=1,R_p=1,V=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}=2\,\frac{7\cdot6}{2!}\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{18}{90}$$

$$P(R=2,R_c=2)=P(R_c=2,R_p=0)=P(R_c=2,R_p=0,V=2)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{0}\cdot\binom{7}{2}}{\binom{10}{4}}=\frac{7\cdot6}{2!}\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{9}{90}$$

$$P(R=3,R_c=2)=P(R_c=2,R_p=1)=P(R_c=2,R_p=1,V=1)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{7}{1}}{\binom{10}{4}}=7\,\frac{4!}{10\cdot9\cdot8\cdot7}=\frac{3}{90}$$

e che gli eventi rimanenti sono impossibili.

Esercizio 4. X ***è una variabile aleatoria con funzione di densità data da***

$$f(x)=\begin{cases} k\cdot\cos x & 0\le x\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & \textit{altrove}\end{cases}$$

a) ***Calcolare il valore della costante*** k

Soluzione: $k=1$.

Infatti

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$$

b) ***Calcolare*** $P(X>\frac{\pi}{4})$

Soluzione: $P(X>\frac{\pi}{4})=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Infatti

$$P(X>\tfrac{\pi}{4})=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=[\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{4}=1-\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 1-0,7071=0,2929$$

c) (facoltativo) ***Calcolare il valore atteso di*** X ***(suggerimento: utilizzare la formula di integrazione per parti)***

Soluzione: $E(X) = \frac{\pi}{2} - 1$
Infatti, tenendo conto che $\cos x\, dx = d \sin x$ e che $-\sin x\, dx = d \cos x$

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, d \sin x = [x \, \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \big(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0\big) = \frac{\pi}{2} - 1 \simeq 0,5707 \end{aligned}$$

d) (**facoltativo**) ***Calcolare la densità di*** $Y = 2X + \pi$

Soluzione: $f_Y(y) = \frac{1}{2} \cos(\frac{y-\pi}{2})$ per $\pi \leq y \leq 2\,\pi$, e $f_Y(y) = 0$ altrimenti.
Infatti

$$F_Y(y) = P(2X + \pi \leq y) = P(X \leq \tfrac{y-\pi}{2}) = F_X(\tfrac{y-\pi}{2})$$

quindi poiché $f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y)$ si ha che

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\tfrac{y-\pi}{2}) = F_X'(\tfrac{y-\pi}{2})\, \frac{d}{dy} \tfrac{y-\pi}{2} = \tfrac{1}{2}\, f_X(\tfrac{y-\pi}{2})$$

Di conseguenza

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(\frac{y-\pi}{2}) & 0 \leq \frac{y-\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \pi \leq y \leq 2\,\pi \\ 0 & \mathit{altrove} \end{cases}$$