Corso di Laurea in Matematica
Corso di CALCOLO DELLE PROBABILITA'
(Docente Prof. F. Spizzichino)
Prova scritta (22/9/1995)

Soluzione degli esercizi proposti

Esercizio 1 Nel trasferire un messaggio da una sorgente ad un destinatario, si ha una probabilita' di successo pari a r o pari ad s (con $0 < s < r < 1$) a seconda che sia verificata o meno una certa condizione C. Per aumentare le probabilita' che il messaggio venga ricevuto dal destinatario, esso viene inviato due volte, sotto la stessa condizione C o $\overline{C} = C^c$; non e' noto quale sia tale condizione e si assegna $P(C) = p$.

Poniamo

$E_1 \equiv$ {il messaggio viene ricevuto dal destinatario la 1^o volta che viene inviato}

$E_2 \equiv$ {il messaggio viene ricevuto dal destinatario la 2^o volta che viene inviato}

cosicchè

$$P(E_1|C) = P(E_2|C) = r,\ P(E_1|\overline{C}) = P(E_2|\overline{C}) = s.$$

Assumiamo inoltre la seguente condizione di indipendenza condizionata:

$$P(E_1 \cap E_2|C) = P(E_1|C)P(E_2|C) = r^2,$$

$$P(E_1 \cap E_2|\overline{C}) = P(E_1|\overline{C})P(E_2|\overline{C}) = s^2$$

i) Verificare che gli eventi E_1 ed E_2 sono positivamente correlati.(**N.B.** questo quesito non era nell'esercizio originario)

ii) Supponiamo ora di sapere che almeno una delle due volte il messaggio viene ricevuto dal destinatario.

Condizionatamente a tale evento calcolare

a) la probabilita' dell'evento C;

b) la probabilita' dell'evento E_1

Soluzione dell'Esercizio 1

i) Gli eventi E_1 ed E_2 sono positivamente correlati se e solo se

$$P(E_1 \cap E_2) \geq P(E_1)P(E_2).$$

Si ha che

$$P(E_i) = P(E_i|C)P(C) + P(E_i|\overline{C})P(\overline{C}) = rp + s(1-p) \qquad \text{per } i = 1, 2$$

e che

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_2|C)P(C) + P(E_1 \cap E_2|\overline{C})P(\overline{C}) = r^2p + s^2(1-p);$$

Quindi la positiva correlazione equivale a

$$r^2p + s^2(1-p) \geq (rp + s(1-p))^2$$

che e' valida perche' la funzione $\phi : x \mapsto \phi(x) = x^2$ e' una funzione convessa, e $rp+s(1-p)$ e' una combinazione convessa di r ed s. Ovvero la relazione precedente si puo' riscrivere come

$$\phi(rp + s(1-p)) \leq \phi(r)p + \phi(s)(1-p),$$

che e' sempre vera. Il segno di uguaglianza si ha solo se $s = r$ (nel qual caso entrambi i membri della disuguaglianza coincidono con r^2).

ii-a) Si deve calcolare $P(C|E_1 \cup E_2)$. Applicando la formula di Bayes

$$P(C|E_1 \cup E_2) = \frac{P(C)P(E_1 \cup E_2|C)}{P(E_1 \cup E_2)} =$$

$$= \frac{P(C)P(E_1 \cup E_2|C)}{P(C)P(E_1 \cup E_2|C) + P(\overline{C})P(E_1 \cup E_2|\overline{C})}$$

Dai dati del problema:

$$P(C) = p, \quad P(E_1 \cup E_2|C) = 2r - r^2, \; P(E_1 \cup E_2|\overline{C}) = 2s - s^2$$

da cui

$$P(C|E_1 \cup E_2) = \frac{p(2r - r^2)}{p(2r - r^2) + (1-p)(2s - s^2)}$$

ii-b) Si deve calcolare $P(E_1|E_1 \cup E_2)$.
Ovviamente

$$P(E_1|E_1 \cup E_2) = \frac{P(E_1)}{P(E_1 \cup E_2)}$$

$$= \frac{P(E_1|C)P(C) + P(E_1|\overline{C})P(\overline{C})}{P(E_1 \cup E_2|C)P(C) + P(E_1 \cup E_2|\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{rp + s(1-p)}{p(2r - r^2) + (1-p)(2s - s^2)}$$