CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA d'esame del 3/luglio/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1 Gli studenti prenotati per un esame orale sono 10. Il professore sceglie a caso una lettera tra le 21 dell'alfabeto e inizia gli esami dal primo (in ordine alfabetico) studente il cui cognome inizia con quella lettera o con la prima lettera successiva a quella estratta (ricominciando dalla A se necessario). Il primo giorno effettua 5 esami e gli altri 5 li lascia al giorno dopo. I cognomi dei 10 studenti sono: Casati, De Carli, De Stefanis, Diodato, Gentili, Girolami, Innocenti, Marini, Politi, Urbani.
a) Calcolare le probabilità di
$M_1 = \{\textit{Marini effettua l'esame il primo giorno}\}$,
$U_1 = \{\textit{Urbani effettua l'esame il primo giorno}\}$,
$D_1 = \{\textit{Diodato effettua l'esame il primo giorno}\}$,
b1) Sapendo che Marini è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Urbani?
b2) Sapendo che Marini è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Diodato?
b3) Sapendo che Urbani è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Diodato?
c1) Gli eventi M_1 ed U_1 sono indipendenti?
c2) Gli eventi M_1 e D_1 sono indipendenti?
c3) Gli eventi M_1, U_1 e D_1 sono (globalmente ovvero mutualmente) indipendenti?
d1) Sapendo che Diodato è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Urbani?
d2) Sapendo invece che Urbani è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Marini?

ESERCIZIO 2 In una produzione industriale di un certo tipo di pezzi, vi è una eguale probabilità che un generico pezzo sia buono o difettoso. Se un pezzo è difettoso, vi è una probabilità del 60% che sia comunque funzionante; i pezzi buoni sono ovviamente funzionanti. Ciascun pezzo si comporta in modo indipendente dall'altro.
a1) Calcolare la probabilità che un pezzo sia funzionante.
a2) Verificato che un pezzo è funzionante, calcolare la probabilità che sia difettoso.
b1) Calcolare (=scrivere l'espressione) la probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano* 90 *funzionanti"*.
b2) Calcolare (=scrivere l'espressione) la probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano almeno* 90 *funzionanti"*.
b3) Posto X il numero di pezzi funzionanti tra 100 esaminati, individuare la legge di X, e calcolare il suo valore atteso $E(X)$ e la sua varianza $Var(X)$.
c) Scrivere in termini di X l'evento $\{$*tra* 100 *pezzi ce ne sono almeno* 90 *funzionanti*$\}$, e calcolarne approssimativamente la probabilità.
d) FACOLTATIVO Posto Y il numero (minimo) di pezzi che si devono esaminare per ottenerne 5 funzionanti, individuare la legge di Y e calcolare il suo valore atteso $E(Y)$.
(**suggerimento**: si consideri *successo* all'$i-$sima prova se l'$i-$simo pezzo esaminato è funzionante, e si interpreti Y come numero di prove necessarie per ....)

ESERCIZIO 3 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe uniformi in $(0,1)$.
a) Calcolare $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$.
b) Posto $U = X + Y$ calcolare la densità $f_U(u)$ di U, distinguendo i casi $u < 0$, $0 < u < 1$, $1 < u < 2$ e $u > 2$.
c) Posto
$$U = X + Y, \quad V = Y^3,$$
calcolare la densità congiunta $f_{U,V}(u,v)$ di U e V.
d1) Spiegare perché le variabili aleatorie U e V non sono indipendenti.
d2) Calcolare la densità condizionata $f_{V|U}(v|u)$ di V dato $U = u$, per $0 < u < 1$ e per $1 < u < 2$.

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- **FOGLIO RISPOSTE - PROVA d'esame** del 3/luglio/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)
NOME.. COGNOME...

ESERCIZIO 1 a)
$P(M_1) =$
$P(U_1) =$
$P(D_1) =$
b1) ....
b2) ....
b3) ....
c1) Gli eventi M_1 ed U_1 sono indipendenti? SI ☐ NO ☐
c2) Gli eventi M_1 e D_1 sono indipendenti? SI ☐ NO ☐
c3) Gli eventi M_1, U_1 e D_1 sono (globalmente) indipendenti? SI ☐ NO ☐
d1) ....
d2) ....

ESERCIZIO 2
a1) La probabilità che un pezzo sia funzionante ....
a2) Verificato che un pezzo è funzionante, la probabilità che sia difettoso ....
b1) La probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano* 90 *funzionanti"* ....
....
b2) La probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano almeno* 90 *funzionanti"* ....
....
b3) Posto X il numero di pezzi funzionanti tra 100 esaminati, individuare la legge di X, e calcolare il suo valore atteso $E(X)$ e la sua varianza $Var(X)$.
c) $\{$*tra* 100 *pezzi ce ne sono almeno* 90 *funzionanti*$\}$ = {..},
approssimativamente la probabilità è ....
d) FACOLTATIVO La legge di Y è ....
$E(Y)$ ....

ESERCIZIO 3
a) $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) =$..............................
b) $f_U(u) =$.. per $u < 0$,
$f_U(u) =$.. $0 < u < 1$,
$f_U(u) =$.. $1 < u < 2$
$f_U(u) =$.. $u > 2$.
c) $f_{U,V}(u, v) =$ ....
....
d1) SVOLTO ☐ NON SVOLTO ☐

d2)
per $0 < u < 1$ $f_{V|U}(v|u) =$ ....
....
per $1 < u < 2$ $f_{V|U}(v|u) =$ ....
....

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- SOLUZIONI PROVA d'esame del 3/luglio/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

ESERCIZIO 1 Gli studenti prenotati per un esame orale sono 10. Il professore sceglie a caso una lettera tra le 21 dell'alfabeto e inizia gli esami dal primo (in ordine alfabetico) studente il cui cognome inizia con quella lettera o con la prima lettera successiva a quella estratta (ricominciando dalla A se necessario). Il primo giorno effettua 5 esami e gli altri 5 li lascia al giorno dopo. I cognomi dei 10 studenti sono: Casati, De Carli, De Stefanis, Diodato, Gentili, Girolami, Innocenti, Marini, Politi, Urbani.

a) Calcolare le probabilità di

$M_1 = \{\textit{Marini effettua l'esame il primo giorno}\}$,

$U_1 = \{\textit{Urbani effettua l'esame il primo giorno}\}$,

$D_1 = \{\textit{Diodato effettua l'esame il primo giorno}\}$,

RISPOSTA a) L'evento M_1 si verifica solo se esce una tra le lettere E, F, G, H, I, L, M, (infatti in questi casi Marini viene esaminato il primo giorno, mentre se esce una lettera tra A e D oppure tra la N e la Z allora Marini non viene esaminato il primo giorno). L'evento U_1 si verifica solo se esce una tra le lettere $H, I, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U$, (infatti in questi casi Urbani viene esaminato il primo giorno, mentre se esce una lettera tra A e G oppure tra la V e la Z allora Urbani non viene esaminato il primo giorno). L'evento D_1 si verifica solo se esce una tra le lettere A, B, C, D oppure Q, R, S, T, U, V, Z, (infatti in questi casi Diodato viene esaminato il primo giorno, mentre se esce una lettera tra E e P allora Diodato non viene esaminato il primo giorno).

Quindi

$$P(M_1) = 7/21 = 1/3, \quad P(U_1) = 12/21 = 4/7, \quad P(D_1) = 11/21.$$

b1) Sapendo che Marini è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Urbani?

b2) Sapendo che Marini è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Diodato?

b3) Sapendo che Urbani è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Diodato?

RISPOSTA b) L'evento $M_1 \cap U_1$ si verifica solo se esce una tra le lettere H, I, L, M, l'evento M_1 e l'evento D_1 sono incompatibili, ed infine l'evento $U_1 \cap D_1$ si verifica solo se esce una tra le lettere Q, R, S, T, U.

Quindi

$$P(U_1|M_1) = \frac{P(M_1 \cap U_1)}{P(M_1)} = \frac{4/21}{7/21} = \frac{4}{7},$$
$$P(D_1|M_1) = \frac{P(M_1 \cap D_1)}{P(M_1)} = 0,$$
$$P(D_1|U_1) = \frac{P(U_1 \cap D_1)}{P(U_1)} = \frac{5/21}{12/21} = \frac{5}{12}$$

c1) Gli eventi M_1 ed U_1 sono indipendenti?

c2) Gli eventi M_1 e D_1 sono indipendenti?

c3) Gli eventi M_1, U_1 e D_1 sono (globalmente ovvero mutualmente) indipendenti?

RISPOSTA c) Gli eventi M_1 ed U_1 sono indipendenti, in quanto

$$P(U_1|M_1) = P(U_1) = \frac{4}{7},$$

invece gli eventi M_1 e D_1 non sono indipendenti in quanto

$$P(D_1|M_1) = 0 \neq P(D_1)(= \frac{11}{21} > 0),$$

o equivalentemente

$$P(D_1 \cap M_1) = 0 \neq P(D_1)P(M_1)(> 0).$$

Di conseguenza anche gli eventi M_1, U_1 e D_1 non sono indipendenti, in quanto dovrebbero valere tutte le seguenti condizioni

$$i)\, P(M_1 \cap U_1) = P(M_1)P(U_1), \quad ii)\, P(M_1 \cap D_1) = P(M_1)P(D_1), \quad iii)\, P(D_1 \cap U_1) = P(D_1)P(U_1),$$

$$iv)\, P(M_1 \cap U_1 \cap D_1) = P(M_1)P(U_1)P(D_1),$$

mentre, come abbiamo appena visto la *ii)* non è verificata.

d1) Sapendo che Diodato è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Urbani?
d2) Sapendo invece che Urbani è stato esaminato il primo giorno, qual è la probabilità che lo sia stato anche Marini?
RISPOSTA d) Per calcolare $P(U_1|D_1)$ si potrebbe procedere direttamente al calcolo come nei casi precedenti,

$$P(U_1|D_1) = \frac{P(D_1 \cap U_1)}{P(D_1)} = \frac{5/21}{11/21} = \frac{5}{11}$$

oppure utilizzando la formula di Bayes

$$P(U_1|D_1) = \frac{P(D_1|U_1)P(U_1)}{P(D_1)} = \frac{(5/12)(12/21)}{11/21} = \frac{5}{11}.$$

Lo stesso vale per il calcolo di $P(M_1|U_1)$, ma qui è importante notare che avendo già mostrato che U_1 ed M_1 sono indipendenti, si può immediatamente affermare che

$$P(M_1|U_1) = P(M_1),$$

infatti

$$P(M_1|U_1) = \frac{P(U_1|M_1)P(M_1)}{P(U_1)} = \frac{P(U_1)P(M_1)}{P(U_1)} = P(M_1).$$

ESERCIZIO 2 In una produzione industriale di un certo tipo di pezzi, vi è una eguale probabilità che un generico pezzo sia buono o difettoso. Se un pezzo è difettoso, vi è una probabilità del 60% che sia comunque funzionante; i pezzi buoni sono ovviamente funzionanti. Ciascun pezzo si comporta in modo indipendente dall'altro.

a1) Calcolare la probabilità che un pezzo sia funzionante.
a2) Verificato che un pezzo è funzionante, calcolare la probabilità che sia difettoso.
RISPOSTA a) Posto B l'evento *"il pezzo è buono"*, $D = B^c$ l'evento *"il pezzo è difettoso"* ed F l'evento *"il pezzo è funzionante"*, si ha che

$$F = F \cap (B \cup D) = (F \cap B) \cup (F \cap D) = B \cup (F \cap D),$$

e che quindi

$$P(F) = P\left(B \cup (F \cap D)\right) = P(B) + P(F \cap D) = P(B) + P(F|D)P(D).$$

Dai dati del problema sappiamo che $P(B) = P(D)$ (e ovviamente $P(B) + P(D) = 1$) e perciò $P(B) = P(D) = 1/2$, e inoltre sappiamo che $P(F|D) = 60/100 = 3/5$. Di conseguenza

$$P(F) = P(B) + P(F|D)P(D) = \frac{1}{2} + \frac{3}{5}\,\frac{1}{2} = \frac{4}{5}.$$

Infine

$$P(D|F) = \frac{P(F|D)P(D)}{P(F)} = \frac{\frac{3}{5}\,\frac{1}{2}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{8}.$$

b1) Calcolare (=scrivere l'espressione) la probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano* 90 *funzionanti"*.
RISPOSTA b1) Si ha che

$$P(\text{tra 100 pezzi ce ne siano 90 funzionanti}) = \binom{100}{90} P(F)^{90} \left(1 - P(F)\right)^{10} = \binom{100}{90} \left(\frac{4}{5}\right)^{90} \left(\frac{1}{5}\right)^{10}$$

b2) Calcolare (=scrivere l'espressione) la probabilità che *"tra* 100 *pezzi ce ne siano almeno* 90 *funzionanti"*.
RISPOSTA b2) Si ha che

$$\begin{aligned} &P(\text{tra 100 pezzi ce ne siano almeno 90 funzionanti}) \\ &= \sum_{k=90}^{100} \binom{100}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{100-k} \left(= 1 - \sum_{h=0}^{89} \binom{100}{h} \left(\frac{4}{5}\right)^{h} \left(\frac{1}{5}\right)^{100-h} \right) \end{aligned}$$

b3) Posto X il numero di pezzi funzionanti tra 100 esaminati, individuare la legge di X, e calcolare il suo valore atteso $E(X)$ e la sua varianza $Var(X)$.
RISPOSTA b3) Chiaramente $X = S_{100}$ conta il numero di successi (successo corrisponde a "il pezzo è funzionante") tra 100 prove indipendenti con $p = P(F) = 4/5$, quindi la legge di X è $Bin(100, 4/5)$, ovvero

$$P(X = k) = \binom{100}{k} \left(\frac{4}{5}\right)^{k} \left(\frac{1}{5}\right)^{100-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 100,$$

e inoltre

$$E(X) = 100p = 100\,\frac{4}{5} = 80$$

$$Var(X) = 100p(1-p) = 100\,\frac{4}{5}\,\frac{1}{5} = 16$$

c) Scrivere in termini di X l'evento $\{$*tra* 100 *pezzi ce ne sono almeno* 90 *funzionanti*$\}$, e calcolarne approssimativamente la probabilità.

RISPOSTA c) Si tratta di calcolare $P(X \leq 90)$. Tenendo conto che

$$P(X \leq 90) = P(S_{100} \leq 100) = P\left(\frac{S_{100} - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}} \leq \frac{90 - 100p}{\sqrt{100p(1-p)}}\right)$$
$$= P\left(\frac{S_{100} - 80}{\sqrt{16}} \leq \frac{90 - 80}{\sqrt{16}}\right) = P\left(S{*}_{100} \leq \frac{10}{4}\right),$$

dove $S^*_{100} = \frac{S_{100}-100p}{\sqrt{100p(1-p)}} = \frac{S_{100}-E(S_{100})}{\sqrt{VarS_{100}}}$, per il teorema centrale del limite si ha

$$P\left(S{*}_{100} \leq 2.5\right) \cong P\left(Z \leq 2.5\right) = \Phi(2.5) = 0.9938,$$

come si ottiene dalle tavole.

d) FACOLTATIVO Posto Y il numero (minimo) di pezzi che si devono esaminare per ottenerne 5 funzionanti, individuare la legge di Y e calcolare il suo valore atteso $E(Y)$.
(**suggerimento**: si consideri *successo* all'$i-$sima prova se l'$i-$simo pezzo esaminato è funzionante, e si interpreti Y come numero di prove necessarie per ....)
RISPOSTA d) Completando il suggerimento si ha che Y rappresenta numero di prove necessarie per ottenere per la prima volta 5 successi e quindi Y segue una legge di Pascal di parametri $m = 5$ e $p = 4/5$, ovvero

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{4}\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)^{k-5}, \qquad k = 5, 6, \ldots,$$

e inoltre

$$E(Y) = 5\,\frac{1}{p} = 5\,\frac{5}{4} = \frac{25}{4}$$

come si puo' ottenere facilmente considerando che Y si può considerare come la somma di cinque variabili aleatorie geometriche di parametro $p = 4/5$:

$$Y = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \Delta_5,$$

e quindi

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{5} E(\Delta_i) = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{p},$$

dove Δ_1 coincide con il tempo di primo successo T_1, ovvero $\Delta_1 = T_1$ è il numero di prove necessarie per ottenere il primo successo; Δ_2 è il numero di prove, dopo il primo successo, necessarie per ottenere il secondo successo; e così via fino a Δ_5 che è il numero di prove, dopo il quarto successo, necessarie per ottenere il quinto successo.

ESERCIZIO 3 Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti, entrambe uniformi in $(0, 1)$.
a) Calcolare $P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2})$.
RISPOSTA a) Ovviamente, per l'indipendenza di X e Y si ha

$$P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = P(X \leq \frac{1}{2})P(Y \leq \frac{1}{2}),$$

e poiché $P(X \leq \frac{1}{2}) = P(Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\left(= \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\right)$ si ha

$$P(X \leq \frac{1}{2}, Y \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

b) Posto $U = X + Y$ calcolare la densità $f_U(u)$ di U, distinguendo i casi $u < 0$, $0 < u < 1$, $1 < u < 2$ e $u > 2$.
RISPOSTA b) È noto che

$$f_U(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(u-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(u-x)dx.$$

L'integrando è diverso da zero solo se

$$0 < x < 1 \text{ e inoltre } 0 < u - x < 1,$$

ovvero se e solo se

$$0 < x < 1 \text{ e inoltre } u-1 < x < u, \quad \Leftrightarrow \quad (0 < x \text{ e } u-1 < x) \text{ e inoltre } (x < 1 \text{ e } x < u)$$

o in altre parole se e solo se

$$\max(0, u-1) < x \text{ e inoltre } x < \min(1, u). \qquad (*)$$

Da ciò si deduce immediatamente che, sia per $u < 0$, che per $u > 2$, si ha $f_U(u) = 0$ in quanto l'insieme delle x che verifica entrambe le relazioni in (*) è vuoto [alternativamente si può ottenere lo stesso risultato considerando che U assume valori compresi tra 0 e 2, quindi la densità deve necessariamente essere nulla al di fuori di $(0, 2)$].
Per $0 < u < 1$ si ottiene che (*) equivale a $0 < x$ e $x < u$, ovvero

$$f_U(u) = \int_0^u \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(u-x)dx = u,$$

mentre, per $1 < u < 2$ si ottiene che (*) equivale a $u - 1 < x$ e $x < 1$, ovvero

$$f_U(u) = \int_{u-1}^1 \mathbb{I}_{(0,1)}(x)\mathbb{I}_{(0,1)}(u-x)dx = 1 - (u-1) = 2 - u.$$

c) Posto

$$U = X + Y, \quad V = Y^3,$$

calcolare la densità congiunta $f_{U,V}(u, v)$ di U e V.
RISPOSTA c) Posto

$$u(x, y) = x + y, \quad e \quad v(x, y) = y^3,$$

si ottiene che la funzione inversa

$$x(u, v) = u - v^{\frac{1}{3}}, \quad e \quad y(u, v)) = v^{\frac{1}{3}},$$

e che

$$\left|\det \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}(x, y)\right| = \left|\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3y^2 \end{pmatrix}\right| = 3y^2,$$

che è diverso da zero in tutto $(0, 1) \times (0, 1)$. Quindi

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) \frac{1}{\left|\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}(x(u, v), y(u, v))\right|}$$

si scrive come

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbb{I}_{(0,1)}(x(u,v))\,\mathbb{I}_{(0,1)}(y(u,v))\,\frac{1}{3y(u,v)^2}\Bigg|_{x=u-v^{\frac{1}{3}},y=v^{\frac{1}{3}}} = \mathbb{I}_{(0,1)}(u-v^{\frac{1}{3}})\,\mathbb{I}_{(0,1)}(v^{\frac{1}{3}})\,\frac{1}{3v^{\frac{2}{3}}}$$

ovvero

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{3v^{\frac{2}{3}}}, \qquad \text{per } 0 < u - v^{\frac{1}{3}} < 1 \text{ e } 0 < v^{\frac{1}{3}} < 1,$$
$$f_{U,V}(u,v) = 0 \qquad \text{altrove}$$

o meglio

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{1}{3v^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}, \qquad \text{per } 0(=0^3) < v < 1(=1^3) \text{ e } (u-1)^3 < v < u^3,$$
$$\text{cioè per } \max(0,(u-1)^3) < v < \min(1,u^3),$$
$$f_{U,V}(u,v) = 0 \qquad \text{altrove}$$

d1) Spiegare perché le variabili aleatorie U e V non sono indipendenti.
d2) Calcolare la densità condizionata $f_{V|U}(v|u)$ di V dato $U = u$, per $0 < u < 1$ e per $1 < u < 2$.
RISPOSTA d) Il fatto che U e V non sono indipendenti è conseguenza del fatto che la densità congiunta non si fattorizza in un prodotto di due funzioni[1] una della sola u e una della sola v. Questo è anche implicato dal fatto che $f_{V|U}(v|u) \neq f_V(v)$:
per $0 < u < 1$

$$f_{V|U}(v|u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{\frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}\mathbb{I}_{(0,u^3)}(v)}{u},$$

mentre per $1 < u < 2$

$$f_{V|U}(v|u) = \frac{f_{U,V}(u,v)}{f_U(u)} = \frac{\frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}\mathbb{I}_{((u-1)^3,1)}(v)}{2-u}.$$

Per vedere che $f_{V|U}(v|u) \neq f_V(v)$ non è necessario calcolare esplicitamente $f_V(v)$: basta notare che $f_{V|U}(v|u)$ dipende (come funzione) dal parametro u, mentre se fosse $f_{V|U}(v|u) = f_V(v)$, non ci sarebbe alcuna dipendenza da u.
Si noti in aggiunta che i casi $u < 0$ e $u > 2$ non sono stati considerati perché per tali valori $f_U(u) = 0$.

[1]Se si avesse $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$, allora si avrebbe che l'insieme $\{(u,v)$ tali che $f_{U,V}(u,v) \neq 0\}$ sarebbe un prodotto cartesiano, in quanto coinciderebbe con l'insieme

$$\{(u,v) \text{ tali che } f_U(u) \neq 0 \text{ e } f_V(v) \neq 0\} = \{u \text{ tali che } f_U(u) \neq 0\} \times \{v \text{ tali che } f_V(v) \neq 0\}.$$

Invece in questo caso

$$\{(u,v) \text{ tali che } f_{U,V}(u,v) \neq 0\} = \{(u,v) \text{ tali che } 0 < u < 1 \text{ e } 0 < v < u^3, \text{ oppure } 1 < u < 2 \text{ e } (u-1)^3 < v < 1\},$$

che non è un prodotto cartesiano, come si può facilmente vedere (si consiglia di disegnare tale insieme).