CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA in ITINERE di RECUPERO del 11/12/2002
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità

$$\begin{cases} f_X(x) = ax + 1 & \text{per } x \in (0, b), \\ f_X(x) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Per ogni $b > 0$, trovare il valore a (si ricordi che si cerca una densità di probabilità).
b) Trovare il valore di b per il quale $E(X) = \frac{2}{3}$.
c) Calcolare la funzione di distribuzione di X.

ESERCIZIO 2. Siano X e Y due variabili aleatorie tali che
$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8}$.

a1) Calcolare la densità discreta di X.
a2) Calcolare la densità discreta di Y.

b1) Calcolare $\mathbb{P}(Y > X)$.
b2) Calcolare $\mathbb{P}(X = k|Y > X)$, per $k = 0, 1, 2$ (ovvero **la densità discreta di** X **condizionata all'evento** $E = \{Y > X\}$) e calcolare $\mathbb{P}(Y > X|X = k)$

Posto $V = XY$ e $W = \max(X, Y)$
c1) Calcolare $\mathbb{E}(V)$.
c2) Calcolare la legge congiunta di V e W

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- **FOGLIO RISPOSTE** - PROVA in ITINERE di RECUPERO del 21/11/2002
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)
NOME.. COGNOME...

ESERCIZIO 1.

a)
....
....

b)
....
....

c)
....
....
....
....

ESERCIZIO 2.

a1)
....
....
....
....

a2)
....
....
....
....

b1)
....
....
....

b2)
....
....
....
....
....

c1)
....
....

c2)
....
....
....

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- SOLUZIONE dell PROVA in ITINERE del 11/12/2002
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

ESERCIZIO 1. *Sia X una variabile aleatoria continua con densità di probabilità*

$$\begin{cases} f_X(x) = ax + 1 & \textit{per } x \in (0, b), \\ f_X(x) = 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

a) *Per ogni $b > 0$, trovare il valore a (si ricordi che si cerca una densità di probabilità) .*

RISPOSTA: Si ha $a(b) = (1-b)\frac{2}{b^2}$, per $0 < b \leq 2$. Inoltre, per $b > 2$, non esiste alcuna densità di probabilità con l'espressione data.

Infatti si tratta di trovare, se esiste un valore di a per cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1, \quad \text{con } f_X(x) \geq 0 \ \text{ per } x \in \mathbb{R}.$$

Si osservi che $f_X(x) = (ax+1)\mathbb{I}_{(0,b)}(x)$, con $b > 0$, e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^b f_X(x)\, dx = a\frac{x^2}{2} + x\Big|_0^b = a\frac{b^2}{2} + b = 1 \Leftrightarrow a\frac{b^2}{2} = 1 - b \Leftrightarrow a = a(b) = (1-b)\frac{2}{b^2}.$$

Ovviamente la condizione $f_X(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ e per $x \geq b$ è automaticamente soddisfatta. Per $x \in (0, b)$ si ha

$$f_X(x) \geq 0 \Leftrightarrow f_X(x) = a(b)x + 1 = (1-b)\frac{2}{b^2}x + 1 \geq 0, \text{ per ogni } x \in (0, b).$$

Tenendo conto che il grafico di f_X coincide con quello di una retta, la precedente relazione vale se e solo se

$$f_X(0) = 1 \geq 0 \text{ e } f_X(b) = (1-b)\frac{2}{b^2}b + 1 = \frac{2(1-b)+b}{b} = \frac{2-b}{b} \geq 0.$$

b) *Trovare il valore di b per il quale $E(X) = \frac{2}{3}$.*

RISPOSTA: il valore cercato è $b = 2$.

Infatti la variabile aleatoria X assume valori nell'insieme limitato $(0, b)$ e quindi ammette tutti i momenti finiti. Inoltre e' assolutamente continua e quindi

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x(a(b)x+1)\mathbb{I}_{(0,b)}(x)\, dx = \int_0^b (a(b)x^2 + x)\, dx \\ &= a(b)\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^b = a(b)\frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} = (1-b)\frac{2}{b^2}\frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} = \frac{4(1-b)b + 3b^2}{6} = \frac{4b-b^2}{6}. \end{aligned}$$

Si ha allora

$$E(X) = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{4b-b^2}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 4b - b^2 = 4 \Leftrightarrow b = 2.$$

c) *Calcolare la funzione di distribuzione di X.*

RISPOSTA: La funzione di distribuzione cercata è, per $b \in (0, 2]$,

$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{per } x \leq 0, \\ F_X(x) = \left((1-b)/b^2\right) x^2 + x & \text{per } x \in (0, b), \\ F_X(x) = 1 & \text{per } x \geq b. \end{cases}$$

e quindi, per $b = 2$,

$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{per } x \leq 0, \\ F_X(x) = x - x^2/4 & \text{per } x \in (0, 2), \\ F_X(x) = 1 & \text{per } x \geq 2. \end{cases}$$

Infatti la variabile aleatoria X è assolutamente continua e quindi

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\ dt.$$

Inoltre X assume valori in $(0, b)$, e quindi immediatamente

$$\begin{cases} F_X(x) = 0 & \text{per } x \leq 0, \\ F_X(x) = 1 & \text{per } x \geq b. \end{cases}$$

Infine, per quanto riguarda $x \in (0, b)$ si ha

$$F_X(x) = \int_0^x (a(b)t + 1)\ dt = a(b)\frac{x^2}{2} + x = (1-b)\frac{2}{b^2}\frac{x^2}{2} + x = \frac{1-b}{b^2}\ x^2 + x.$$

ESERCIZIO 2. *Siano X e Y due variabili aleatorie tali che*

$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = \frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{8}$
$\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{1}{8}$.

a1) *Calcolare la densità discreta di X.*
a2) *Calcolare la densità discreta di Y.*

RISPOSTA: **a1)** La variabile aleatoria X assume i valori $0, 1, 2$ e si ha

$$p_X(0) = 3/8, \quad p_X(1) = 3/8, \quad p_X(2) = 2/8.$$

a2) Per motivi di simmetria Y ha la stessa legge di X, ovvero si ha $p_X(i) = p_Y(i)$ per $i = 0, 1, 2$.

Infatti $p_{X,Y}(i, j) = \mathbb{P}(X = i, Y = j) = 1/8$ per $i, j \in \{0, 1, 2\}$ escluso $(i, j) = (2, 2)$.

$$p_X(0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) = 3/8,$$
$$p_X(1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 3/8,$$
$$p_X(2) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 2/8.$$

b1) *Calcolare* $\mathbb{P}(Y > X)$.
b2) *Calcolare* $\mathbb{P}(X = k|Y > X)$, *per* $k = 0, 1, 2$ *(ovvero* ***la densità discreta di*** X ***condizionata all'evento*** $E = \{Y > X\}$*) e calcolare* $\mathbb{P}(Y > X|X = k)$

RISPOSTA: **b1)** Si ha $\mathbb{P}(Y > X) = 3/8$
b2) Si ha

$$\mathbb{P}(X = 0|Y > X) = 2/3, \quad \mathbb{P}(X = 1|Y > X) = 1/3, \quad \mathbb{P}(X = 0|Y > X) = 0.$$

Infatti

$$\mathbb{P}(Y > X) = \sum_{i<j}^{0\leq i,j\leq 2}\sum \mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = 3/8.$$

ed inoltre

$$\mathbb{P}(X = k|Y > X) = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y > X)}{\mathbb{P}(Y > X)} = \frac{\mathbb{P}(X = k, Y > k)}{\mathbb{P}(Y > X)}$$

e quindi

$$\mathbb{P}(X = 0|Y > X) = \frac{\mathbb{P}(X = 0, Y > 0)}{\mathbb{P}(Y > X)} = \frac{\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 0, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y > X)} = \frac{2/8}{3/8} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(X = 1|Y > X) = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y > 1)}{\mathbb{P}(Y > X)} = \frac{\mathbb{P}(X = 1, Y = 2)}{\mathbb{P}(Y > X)} = \frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$$

e quindi $\mathbb{P}(X = 2|Y > X) = 0$, come del resto si può ottenere immediatamente in quanto $\mathbb{P}(X = 2 \cap Y > X) = 0$

Posto $V = XY$ *e* $W = \max(X, Y)$
c1) *Calcolare* $\mathbb{E}(V)$.
c2) *Calcolare la legge congiunta di* V *e* W

RISPOSTA: **c1)** Si ha $\mathbb{E}(V) = 5/8$
c2) Si ha

$$p_{V,W}(0, 0) = p_{V,W}(1, 1) = 1/8, \quad p_{V,W}(0, 1) = p_{V,W}(1, 0) = p_{V,W}(2, 2) = 2/8,$$

e (quindi) $p_{V,W}(v, w) = 0$ per tutti gli altri valori di (u, w).

Infatti

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} i \cdot j\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{8}(1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = \frac{5}{8}.$$

Per quanto riguarda la legge congiunta di $V = XY$ e $W = \max(X, Y)$, si osserva subito che possono assumere i valori $\{0, 1, 2\}$. Inoltre

$$
\begin{aligned}
p_{V,W}(0,0) &= \mathbb{P}(XY = 0, \max(X,Y) = 0) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/8 \\
p_{V,W}(0,1) &= \mathbb{P}(XY = 0, \max(X,Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 0) = 2/8 \\
p_{V,W}(0,2) &= \mathbb{P}(XY = 0, \max(X,Y) = 2) = \mathbb{P}(X = 0, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = 2/8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{V,W}(1,0) &= \mathbb{P}(XY = 1, \max(X,Y) = 0) = 0 \\
p_{V,W}(1,1) &= \mathbb{P}(XY = 1, \max(X,Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = 1/8 \\
p_{V,W}(1,2) &= \mathbb{P}(XY = 1, \max(X,Y) = 2) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{V,W}(2,0) &= \mathbb{P}(XY = 2, \max(X,Y) = 0) = 0 \\
p_{V,W}(2,1) &= \mathbb{P}(XY = 2, \max(X,Y) = 1) = 0 \\
p_{V,W}(2,2) &= \mathbb{P}(XY = 2, \max(X,Y) = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = 2/8
\end{aligned}
$$