CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- PROVA in ITINERE di RECUPERO del 20/01/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

ESERCIZIO 1. In uno schema di Bernoulli con eventi $\{A_n, n \geq 1\}$ e con $\mathbb{P}(A_n) = p$, sia T il tempo di primo successo ed S il tempo di secondo successo.

a) Posto $X_i = \mathbb{I}_{A_i}$, scrivere in termini di $\{X_i, i \geq 1\}$ l'evento $\{T = 2, S = 5\}$, e calcolare $\mathbb{P}(T = 2, S = 5)$, e $\mathbb{P}(T = 3, S = 2)$ [1].

b) Calcolare la densità discreta condizionata di T data S[2].

c) Calcolare $\mathbb{E}[T|S = h]$ [3], e $\mathbb{E}(\mathbb{E}[T|S])$.

ESERCIZIO 2. Sia (U, V) una variabile aleatoria bidimensionale con densità congiunta

$$\begin{cases} f_{U,V}(u,v) = 1 & \text{per } (u,v) \in (0,1) \times (0,1), \\ f_{U,V}(u,v) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) Mostrare che Ue V sono uniformi in $(0, 1)$ ed indipendenti.

b) Posto

$$X = -\frac{\log(1-U)}{2}, \qquad Y = -\frac{\log(1-V)}{2},$$

mostrare che X ed Y sono variabili aleatorie esponenziali ed indipendenti.

c) Posto

$$W = 2X, \qquad Z = X - Y,$$

trovare la densità congiunta di W e Z, e calcolare la densità marginale di Z[4].

c)bis (per chi non sapesse rispondere al punto **c)**)
Posto $Z = X - Y$, calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $Var(Z)$.

---

[1] Originariamente era richiesto di calcolare $\mathbb{P}(T = 2, S = 1)$

[2] Ovviamente va calcolata prima la densità discreta congiunta di T ed S e va specificato per quali valori ha senso ed è diversa da zero

[3] Ovviamente va specificato per quali valori ha senso

[4] Si suggerisce di distinguere il caso $z \geq 0$ ed il caso $z < 0$

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- **FOGLIO RISPOSTE** - PROVA in ITINERE del 20/01/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)
NOME.. COGNOME..

ESERCIZIO 1.

a)
....
....

b)
....
....

c)
....
....
....
....

ESERCIZIO 2.

a)
....
....
....
....
....
....
....
....

b)
....
....
....
....

c)
....
....
....
....
....
....

c)bis
....
....
....

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1^o modulo)
- SOLUZIONE della PROVA in ITINERE del 20/01/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

ESERCIZIO 1. *In uno schema di Bernoulli con eventi* $\{A_n, n \geq 1\}$ *e con* $\mathbb{P}(A_n) = p$, *sia* T *il tempo di primo successo ed* S *il tempo di secondo successo.*

a) *Posto* $X_i = \mathbb{I}_{A_i}$, *scrivere in termini di* $\{X_i, i \geq 1\}$ *l'evento* $\{T = 2, S = 5\}$, *e calcolare* $\mathbb{P}(T = 2, S = 5)$, *e* $\mathbb{P}(T = 3, S = 2)$ [5].

RISPOSTA: L'evento $\{T = 2, S = 5\}$ coincide con l'evento $\{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1\}(= A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)$, $\mathbb{P}(T = 2, S = 5) = p^2(1-p)^3$, e $\mathbb{P}(T = 3, S = 2) = 0$ [6].

Infatti $T = 2$ e $S = 5$ si verificano contemporaneamente se e solo se alla prima prova si ha un insuccesso (cioè si verifica $X_1 = 0$ o equivalentemente si verifica A_1^c), alla seconda si ha un successo (cioè si verifica $X_2 = 1$ o equivalentemente si verifica A_2), alla terza si ha un insuccesso, e lo stesso alla quarta prova, ed infine alla quinta un successo.
Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T = 2, S = 5) &= \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0, X_4 = 0, X_5 = 1) = \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5) \\ &= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 0)\mathbb{P}(X_4 = 0)\mathbb{P}(X_5 = 1) = \mathbb{P}(A_1^c)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3^c)\mathbb{P}(A_4^c)\mathbb{P}(A_5) \\ &= (1-p)p(1-p)(1-p)p = p^2(1-p)^3.\end{aligned}$$

L'evento $\{T = 3, S = 2\} = \emptyset$ in quanto $T < S$ e quindi è impossibile che sia $T = 3$ ed $S = 2$ contemporaneamente[7].

b) *Calcolare la densità discreta condizionata di* T *data* S[8].

RISPOSTA: per $h \geq 2$ si ha

$$\mathbb{P}(T = k | S = h) = \frac{1}{h-1} \qquad \text{per } k \in \{1, \cdots h-1\}.$$

Infatti $\mathbb{P}(T = k|S = h)$ ha senso solo per h tale che $\mathbb{P}(S = h) > 0$, ovvero per $h \geq 2$, ed inoltre, ovviamente

$$\mathbb{P}(T = k|S = h) = \frac{\mathbb{P}(T = k, S = h)}{\mathbb{P}(S = h)} = 0 \qquad \text{per } k \geq h.$$

Per $1 \leq k \leq h - 1$ si ha che

$$\{T = k, S = h\} = \{X_1 = 0, \cdots, X_{k-1} = 0, X_k = 1, X_{k+1} = 0, \cdots, X_{h-1} = 0, X_h = 1\}$$

e quindi $\mathbb{P}(T = k, S = h) = p^2(1-p)^{h-2}$ in quanto, nelle prime h prove, ci sono 2 successi ed $h - 2$ insuccessi, nell'ordine specificato. Di conseguenza

$$\mathbb{P}(T = k|S = h) = \frac{\mathbb{P}(T = k, S = h)}{\sum_l \mathbb{P}(T = l, S = h)} = \frac{p^2(1-p)^{h-2}}{\sum_{l=1}^{h-1} p^2(1-p)^{h-2})} = \frac{1}{h-1} \qquad \text{per } k \in \{1, \cdots h-1\}.$$

[5] Originariamente era richiesto di calcolare $\mathbb{P}(T = 2, S = 1)$
[6] Nella domanda originaria $\mathbb{P}(T = 2, S = 1) = 0$
[7] Si ha $\{T = 2, S = 1\} = \emptyset$ per lo stesso motivo, ma anche perchè $\{T = 2, S = 1\} \subset \{S = 1\} = \emptyset$
[8] Ovviamente va calcolata la densità discreta congiunta di T ed S e va specificato per quali valori ha senso ed è diversa da zero.

c) *Calcolare* $\mathbb{E}[T|S=h]$ [9], *e* $\mathbb{E}(\mathbb{E}[T|S])$.

RISPOSTA: $\mathbb{E}[T|S=h] = h/2$ e $\mathbb{E}(\mathbb{E}[T|S]) = 1/p$.

Infatti, sempre per $h \geq 2$,

$$\mathbb{E}[T|S=h] = \sum_k k\mathbb{P}(T=k|S=h) = \sum_{k=1}^{h-1} k\mathbb{P}(T=k|S=h)$$
$$= \sum_{k=1}^{h-1} k\frac{1}{h-1} = \frac{1}{h-1}\frac{(h-1)h}{2} = \frac{h}{2}.$$

Per quanto riguarda $\mathbb{E}(\mathbb{E}[T|S])$,

I si può osservare che per una nota proprietà del valore atteso condizionato si ha $\mathbb{E}(\mathbb{E}[T|S]) = \mathbb{E}(T) =$, e ricordare che T è una variabile aleatoria geometrica di parametro p, e quindi il suo valore atteso è $1/p$ [10];

oppure

II si può osservare che $\mathbb{E}[T|S] = S/2$, e che

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{h=2}^{\infty} h\mathbb{P}(S=h) = \sum_{h=2}^{\infty} h(h-1)p^2(1-p)^{h-2}$$
$$= p^2\sum_{h=2}^{\infty} h(h-1)(1-p)^{h-2} = p^2\sum_{h=0}^{\infty} h(h-1)(1-p)^{h-2}$$
$$= p^2\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=1-p} = p^2\,\frac{2}{(1-x)^3}\bigg|_{x=1-p} = p^2\frac{2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}.$$

ESERCIZIO 2. Sia (U,V) una variabile aleatoria bidimensionale con densità congiunta

$$\begin{cases} f_{U,V}(u,v) = 1 & \text{per } (u,v) \in (0,1)\times(0,1), \\ f_{U,V}(u,v) = 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

a) *Mostrare che* U *e* V *sono uniformi in* $(0,1)$ *ed indipendenti.*

RISPOSTA: Si tratta di dimostrare che

$$f_U(u) = \mathbb{I}_{(0,1)}(u) \quad f_V(v) = \mathbb{I}_{(0,1)}(v)$$

e che $f_{U,V}(u,v) = f_U(u)f_V(v)$ e quindi che

$$f_{U,V}(u,v) = \mathbb{I}_{(0,1)}(u)\cdot\mathbb{I}_{(0,1)}(v).$$

[9] Ovviamente va specificato per quali valori ha senso

[10] Per comodità ricordiamo che

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(T=k) = \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^{k-1}$$
$$= p\frac{d}{dx}\,\frac{1}{1-x}\bigg|_{x=1-p} = p^2\,\frac{1}{(1-x)^2}\bigg|_{x=1-p} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Quest'ultima uguaglianza è evidente: basta osservare che

$$\begin{cases} \mathbb{I}_{(0,1)}(u)\cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(v)=1 & \text{per } (u,v)\in(0,1)\times(0,1),\\ \mathbb{I}_{(0,1)}(u)\cdot \mathbb{I}_{(0,1)}(v)=0 & \text{altrimenti.}\end{cases}$$

In generale per due variabili aleatorie ξ_1 ed ξ_2 con densità congiunta $f(x,y)$, per ottenere l'indipendenza, è sufficiente per mostrare che la densità congiunta si fattorizza nel prodotto di due funzioni:

$$f(x,y)=h_1(x)h_2(y).$$

Se poi accade che $h_1(x)$ è una densità di probabilità, allora anche $h_2(y)$ è una densità, e $h_i(x)$ coincide con la densità marginale di ξ_i, per $i=1,2$.

Tuttavia, **si può procedere direttamente anche** così, senza utilizzare il risultato precedente: Per mostrare che U è uniforme in $(0,1)$ basta calcolare la densità marginale:

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv=\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\mathbb{I}_{(0,1)}(v)=\mathbb{I}_{(0,1)}(u)\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{I}_{(0,1)}(v)=\mathbb{I}_{(0,1)}(u),$$

o, equivalentemente,

$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv=0 \qquad \text{per } u\notin(0,1)$$
$$f_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U,V}(u,v)dv=\int_0^1 f_{U,V}(u,v)dv=1 \qquad \text{per } u\in(0,1)$$

b) *Posto*

$$X=-\frac{\log(1-U)}{2},\qquad Y=-\frac{\log(1-V)}{2},$$

mostrare che X ed Y sono variabili aleatorie esponenziali ed indipendenti.

RISPOSTA: L'indipendenza di X ed Y discende subito da un risultato generale: $X=\varphi(U)$ e $Y=\psi(V)$, con U e V indipendenti, e quindi anche X ed Y lo sono [11].
Per quanto riguarda la legge di X, basta mostrare che X è una v.a. esponenziale (di parametro 2) perché è evidente che Y ha la stessa legge di X.

$$\begin{aligned} F_X(x)&=\mathbb{P}(X\le x)=\mathbb{P}(-\frac{\log(1-U)}{2}\le x)=\mathbb{P}(-\log(1-U)\le 2x)\\ &=\mathbb{P}(\log(1-U)\ge -2x)=\mathbb{P}(\exp\{\log(1-U)\}\ge\exp\{-2x\})=\mathbb{P}(1-U\ge \mathrm{e}^{-2x})\\ &=\mathbb{P}(1-\mathrm{e}^{-2x}\ge U)=\mathbb{P}(U\le 1-\mathrm{e}^{-2x})=F_U(1-\mathrm{e}^{-2x})\end{aligned}$$

Si noti che le precedenti uguaglianze valgono perché gli eventi considerati sono tutti uguali[12].

Tenendo conto del fatto che $F_U(u)=0$, per $u<0$, e che, per $x<0$, si ha $1-\mathrm{e}^{-2x}<0$, segue che

$$F_X(x)=0\qquad \text{per } x<0.$$

[11] Si noti che non è quindi necessario aver risposto al punto **a)** per rispondere a questa domanda.

[12] Infatti

$$\begin{aligned}&X(\omega)\le x\Leftrightarrow -\frac{\log(1-U(\omega))}{2}\le x\Leftrightarrow -\log(1-U(\omega))\le 2x\\ &\Leftrightarrow \log(1-U(\omega))\ge -2x\Leftrightarrow \exp\{\log(1-U(\omega))\}\ge\exp\{-2x\}\Leftrightarrow 1-U(\omega)\ge \mathrm{e}^{-2x}\\ &\Leftrightarrow 1-\mathrm{e}^{-2x}\ge U(\omega)\Leftrightarrow U(\omega)\le 1-\mathrm{e}^{-2x}\end{aligned}$$

Inoltre $F_U(u) = u$ per $0 \leq u < 1$ e che, per $x \geq 0$, si ha $1 - \mathrm{e}^{-2x} \in [0, 1)$, segue che

$$F_X(x) = 0 \qquad \text{per } x \geq 0,$$

e ciò completa la dimostrazione.

Alternativamente: la funzione

$$\varphi : (0,1) \to (0,\infty); u \mapsto \varphi(u) = -\frac{\log(1-u)}{2}$$

è invertibile ($varphi^{-1}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$) e la v.a. U ha la proprietà che $\mathbb{P}(U \in (0,1)) = 1$; di conseguenza si può usare il risultato che assicura che allora $X = \varphi(U)$ ammette densità $f_X(x)$, con

$$\begin{aligned} f_X(x) &= f_U(\varphi^{-1}(x)) \left| \frac{d}{dx}\varphi^{-1}(x) \right| = f_U(\varphi^{-1}(x)) \left| \frac{1}{\frac{d}{dx}\varphi(t)|_{t=\varphi^{-1}(x)}} \right| \\ &= \mathbb{I}_{(0,1)}(1 - \mathrm{e}^{-2x}) \left| \frac{d}{dx}(1 - \mathrm{e}^{-2x}) \right| = \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\ 2\ \mathrm{e}^{-2x}, \end{aligned}$$

che è appunto la densità di una v.a. esponenziale di parametro 2.

c) *Posto*

$$W = 2X, \qquad Z = X - Y,$$

trovare la densità congiunta di W e Z, e calcolare la densità marginale di Z[13].

RISPOSTA: Si ha

$$f_{W,Z}(w,z) = 2\mathrm{e}^{-2w+2z}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w - 2z),$$

ovvero

$$\begin{cases} f_{W,Z}(w,z) = 2\mathrm{e}^{-2w+2z} & \text{per } z < 0 \text{ e } w > 0, \\ f_{W,Z}(w,z) = 2\mathrm{e}^{-2w+2z} & \text{per } z > 0 \text{ e } w > 2z, \end{cases}$$

e

$$f_Z(z) = \mathrm{e}^{-2|z|}.$$

Infatti $(W, Z) = g(X, Y)$, con $g(x, y) = (2x, x - y)^t$, cioè $w = 2x$, e $z = x - y$. Di conseguenza $x = w/2$ e $y = x - z = (w/2) - z$, ossia $g^{-1}(w, z) = (w/2, w/2 - z)$. La funzione g è quindi invertibile e il suo Jacobiano è

$$J_g(x,y) = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

Analogamente

$$J_{g^{-1}}(w,z) = \det \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Applicando la formula di trasformazione per le densità si ottiene

$$\begin{aligned} f_{W,Z}(w,z) &= f_{X,Y}(g^{-1}(w,z))\frac{1}{2} = f_{X,Y}(w/2, w/2 - z) = f_X(w/2)f_Y(w/2 - z)\frac{1}{2} \\ &= \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w/2)\ 2\ \mathrm{e}^{-2w/2} \cdot \mathbb{I}_{(0,\infty)}(w/2 - z)\ 2\ \mathrm{e}^{-2(w/2-z)}\frac{1}{2} \\ &= 2\mathrm{e}^{-2w+2z}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w - 2z). \end{aligned}$$

[13] Si suggerisce di distinguere il caso $z > 0$ ed il caso $z < 0$.

A questo punto basta calcolare

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,Z}(w,z)dw = \int_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2w+2z}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w)\mathbb{I}_{(0,\infty)}(w-2z)dw,$$

ovvero, per $z < 0$

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2w+2z}dw = \mathrm{e}^{2z}\int_0^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2w}dw = \mathrm{e}^{2z} = \mathrm{e}^{-2|z|}.$$

mentre, per $z > 0$

$$f_Z(z) = \int_{2z}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2w+2z}dw = \mathrm{e}^{2z}\int_{2z}^{\infty} 2\mathrm{e}^{-2w}dw = \mathrm{e}^{2z}\left[-\mathrm{e}^{-2w}\right]_{2z}^{\infty} = \mathrm{e}^{-2z} = \mathrm{e}^{-2|z|}.$$

Alternativamente si può considerare che $Z = X + (-Y)$ e quindi, per la formula della convoluzione,

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_{-Y}(z-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(x-z)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}_{(0,\infty)}(x)\ 2\ \mathrm{e}^{-2x}\mathbb{I}_{(0,\infty)}(x-z)\ 2\ \mathrm{e}^{-2(x-z)}dx, \end{aligned}$$

tenendo conto che $f_{-Y}(y) = f_Y(-y)$, come si vede facilmente.
Con lo stesso tipo di calcoli effettuati precedentemente si può allora ottenere la densità di Z.

c)bis (per chi non sapesse rispondere al punto **c)**)
Posto $Z = X - Y$, calcolare $\mathbb{E}(Z)$ e $Var(Z)$.

RISPOSTA: Si ha $\mathbb{E}(Z) = 0$ e $Var(Z) = 1/2$.

Infatti [14]

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

in quanto il valore atteso di una v.a. esponenziale di parametro λ è $1/\lambda$.
Inoltre, per le proprietà della varianza e della covarianza

$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= Var(X) + Var(-Y) + 2Cov(X,-Y) = Var(X) + (-1)^2Var(Y) - 2Cov(X,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che essendo X ed Y indipendenti si ha $Cov(X,Y) = 0$ e che la varianza di una v.a. esponenziale di parametro λ è $1/\lambda^2$.

[14] Nel caso non si sappia rispondere alla domanda **b)** si può procedere così:
Posto $X \sim EXP(\lambda)$ e $Y \sim EXP(\mu)$, con X e Y indipendenti, si ha

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X-Y) = \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu},$$

inoltre, per le proprietà della varianza e della covarianza

$$\begin{aligned} Var(X-Y) &= Var(X) + Var(-Y) + 2Cov(X,-Y) = Var(X) + (-1)^2Var(Y) - 2Cov(X,Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\mu^2}, \end{aligned}$$

tenendo conto del fatto che essendo X ed Y indipendenti si ha $Cov(X,Y) = 0$