

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1° modulo)  
- PROVA in ITINERE di RECUPERO del 21/11/2002  
- Laurea Quadiennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

**ESERCIZIO 1.** Due amici Alberto e Bruno sparano contemporaneamente ad un bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%. Si supponga che gli eventi  $A = \{\text{Alberto colpisce il bersaglio}\}$  e  $B = \{\text{Bruno colpisce il bersaglio}\}$  siano indipendenti.

a) Calcolare la probabilità degli eventi

$E = \{\text{entrambi colpiscono il bersaglio}\}$

$F = \{\text{solo 1 tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio}\}$

$G = \{\text{nessuno colpisce il bersaglio}\}$

b) **Sapendo che** il bersaglio è stato colpito da un solo giocatore, calcolare la probabilità che il bersaglio sia stato colpito da Alberto.

**ESERCIZIO 2.** Un sacchetto contiene 4 palline rosse e 6 verdi. Si procede a due turni di estrazioni. (LE PALLINE ESTRATTE NON SONO MAI REINSERITE)

Nel primo turno si estraggono 2 palline **senza reinserimento**. Nel secondo turno si estraggono altre 2 palline **senza reinserimento**.

Si pongano

$H_k = \{\text{nel primo turno vengono estratte (esattamente) } k \text{ palline rosse}\}$ , per  $k = 0, 1, 2$ ,

$G_l = \{\text{nel secondo turno vengono estratte (esattamente) } l \text{ palline rosse}\}$ , per  $l = 0, 1, 2$ .

a1) Calcolare  $\mathbb{P}(H_k)$ , per  $k = 0, 1, 2$ . (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)

a2) (**facoltativo**) Calcolare  $\mathbb{P}(G_l)$ , per  $l = 0, 1, 2$ . (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)

b1) Calcolare

$$\mathbb{P}(G_1|H_0) \text{ e } \mathbb{P}(G_1 \cap H_0), \quad \mathbb{P}(G_2|H_0) \text{ e } \mathbb{P}(G_2 \cap H_0), \quad \mathbb{P}(G_2|H_1) \text{ e } \mathbb{P}(G_2 \cap H_1).$$

Si ponga  $E$  l'evento  $\{\text{nel secondo turno di estrazioni vengono estratte } \mathbf{più} \text{ palline rosse che nel primo turno}\}$ .

(N.B. si intende un numero di palline rosse **strettamente** maggiore)

b2) Esprimere l'evento  $E$  in termini di  $H_k$  e  $G_l$ , e calcolare  $\mathbb{P}(E)$ .

c) Calcolare  $\mathbb{P}(H_k|E)$ , per  $k = 0, 1, 2$ .

IN ALTERNATIVA (se non si sa rispondere alla precedente domanda)

c') Calcolare  $\mathbb{P}(H_k|G_2)$ , per  $k = 0, 1, 2$ .

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1° modulo)  
- **FOGLIO RISPOSTE** - PROVA in ITINERE di RECUPERO del 21/11/2002  
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)  
NOME..... COGNOME.....

**ESERCIZIO 1.**

a)

.....  
.....  
.....  
.....

b)

.....  
.....  
.....

**ESERCIZIO 2.**

a1)

.....  
.....  
.....  
.....

a2)

.....  
.....  
.....  
.....

b1)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....  
.....

b2)

.....  
.....  
.....  
.....  
.....

c)  IN ALTERNATIVA c')

.....  
.....  
.....  
.....  
.....



CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (1° modulo)  
 - SOLUZIONE dell PROVA in ITINERE di RECUPERO del 21/11/2002  
 - Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

**ESERCIZIO 1.** Due amici Alberto e Bruno sparano contemporaneamente ad un bersaglio. Alberto colpisce il bersaglio il 70% delle volte, mentre Bruno lo colpisce il 90%. Si supponga che gli eventi  $A = \{\text{Alberto colpisce il bersaglio}\}$  e  $B = \{\text{Bruno colpisce il bersaglio}\}$  siano indipendenti.

a) Calcolare la probabilità degli eventi

$E = \{\text{entrambi colpiscono il bersaglio}\}$

$F = \{\text{solo 1 tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio}\}$

$G = \{\text{nessuno colpisce il bersaglio}\}$

Dai dati del problema si sa che  $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{10}$  e  $\mathbb{P}(B) = \frac{9}{10}$ . Poiché gli eventi  $A$  e  $B$  sono indipendenti si ha che

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = \frac{7}{10} \frac{9}{10} = \frac{63}{100} \\ \mathbb{P}(A \cap B^c) &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c) = \frac{7}{10} \frac{1}{10} = \frac{7}{100} \\ \mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10} \frac{9}{10} = \frac{27}{100} \\ \mathbb{P}(A^c \cap B^c) &= \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) = \frac{3}{10} \frac{1}{10} = \frac{3}{100}.\end{aligned}$$

Inoltre

$$E = A \cap B,$$

$$F = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B), \quad \text{ovvero } F = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

in quanto l'evento  $\{\text{solo 1 tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio}\} = \{\text{almeno 1 tra Alberto e Bruno colpisce il bersaglio, ma non tutti e due}\}$  e infine

$$G = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$$

e quindi

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{63}{100},$$

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \frac{7}{100} + \frac{27}{100} = \frac{34}{100},$$

oppure

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F) &= \mathbb{P}((A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{7}{10} + \frac{9}{10} - 2 \frac{63}{100} = \frac{34}{100},\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \frac{3}{100}$$

Alternativamente, tenendo conto che  $G = (A \cup B)^c$  si poteva anche calcolare

$$\mathbb{P}(G) = \mathbb{P}((A \cup B)^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cup B) = 1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)) = 1 - \left(\frac{7}{10} + \frac{9}{10} - \frac{63}{100}\right) = \frac{3}{100}$$

**b) Sapendo che il bersaglio è stato colpito da un solo giocatore, calcolare la probabilità che il bersaglio sia stato colpito da Alberto.**

Si tratta di calcolare  $\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$ . Si ha che  $A \cap F = A \cap ((A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)) = A \cap B^c$  e quindi

$$\mathbb{P}(A|F) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B^c)}{\mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B)} = \frac{\frac{7}{100}}{\frac{7}{100} + \frac{27}{100}} = \frac{7}{34}$$

**ESERCIZIO 2.** Un sacchetto contiene 4 palline rosse e 6 verdi. Si procede a due turni di estrazioni. (LE PALLINE ESTRATTE NON SONO MAI REINSERITE)

Nel primo turno si estraggono 2 palline **senza reinserimento**. Nel secondo turno si estraggono altre 2 palline **senza reinserimento**.

Si pongano

$H_k = \{\text{nel primo turno vengono estratte (esattamente) } k \text{ palline rosse}\}$ , per  $k = 0, 1, 2$ ,

$G_l = \{\text{nel secondo turno vengono estratte (esattamente) } l \text{ palline rosse}\}$ , per  $l = 0, 1, 2$ .

**a1)** Calcolare  $\mathbb{P}(H_k)$ , per  $k = 0, 1, 2$ . (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)

Trattandosi di 2 estrazioni senza rimbussolamento, da un'urna che contiene 4 palline rosse e 6 verdi, si ha

$$\mathbb{P}(H_k) = \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{2-k}}{\binom{10}{2}}$$

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{1 \cdot 15}{45} = \frac{1}{3}; \quad \mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{4 \cdot 6}{45} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}; \quad \mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{45} = \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$$

**a2) (facoltativo)** Calcolare  $\mathbb{P}(G_l)$ , per  $l = 0, 1, 2$ . (**N.B.** si intendono le probabilità a priori, cioè prima di effettuare qualsiasi estrazione)

Poiché si tratta delle probabilità a priori, e poiché per ogni  $l$  l'evento  $G_l$  è dello stesso tipo dell'evento  $H_l$ , ma relativo alla terza pallina estratta e alla quarta pallina estratta, invece che alla prima e alla seconda, deve essere

$$\mathbb{P}(G_l) = \mathbb{P}(H_l) \quad \text{per ogni } l = 0, 1, 2.$$

Alternativamente si poteva calcolare direttamente

$$\mathbb{P}(G_l) = \sum_{k=0}^2 \mathbb{P}(H_k) \mathbb{P}(G_l | H_k)$$

dove

$$\mathbb{P}(G_l | H_k) = \frac{\binom{4-k}{l} \binom{6-(2-k)}{2-l}}{\binom{8}{2}} = \frac{\binom{4-k}{l} \binom{4+k}{2-l}}{\binom{8}{2}},$$

in quanto dopo il primo turno di estrazioni sono rimaste nell'urna 8 palline, e se sappiamo che si è verificato  $H_k$ , cioè se sappiamo che nel primo turno ne sono state estratte  $k$  rosse, allora nell'urna sono rimaste  $4 - k$  palline rosse e (quindi)  $4 + k$  verdi.

$$\mathbb{P}(G_l) = \sum_{k=0}^2 \frac{\binom{4}{k} \binom{6}{2-k}}{\binom{10}{2}} \frac{\binom{4-k}{l} \binom{4+k}{2-l}}{\binom{8}{2}},$$

ovvero

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(G_l) &= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2-0} \binom{4-0}{l} \binom{4+0}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2-1} \binom{4-1}{l} \binom{4+1}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{2-2} \binom{4-2}{l} \binom{4+2}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}}, \\
 &= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2} \binom{4}{l} \binom{4}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1} \binom{3}{l} \binom{5}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{0} \binom{2}{l} \binom{6}{2-l}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}}. \\
 \mathbb{P}(G_0) &= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2} \binom{4}{0} \binom{4}{2}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1} \binom{3}{0} \binom{5}{2}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{0} \binom{2}{0} \binom{6}{2}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} \\
 &= \frac{1}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} (1 \cdot 15 \cdot 1 \cdot 6 + 4 \cdot 6 \cdot 1 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 15) \\
 &= \frac{1}{45 \cdot 28} 6(15 + 40 + 15) = \frac{1}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} 3 \cdot 2 \cdot 70 = \frac{1}{3}. \\
 \mathbb{P}(G_1) &= \frac{\binom{4}{0} \binom{6}{2} \binom{4}{1} \binom{4}{1}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{1} \binom{3}{1} \binom{5}{1}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} + \frac{\binom{4}{2} \binom{6}{0} \binom{2}{1} \binom{6}{1}}{\binom{10}{2} \binom{8}{2}} \\
 &= \frac{1}{45 \cdot 28} (1 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 5 + 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6) \\
 &= \frac{1}{45 \cdot 28} 3 \cdot 2^3 (5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 3) = \frac{1}{45 \cdot 28} 3 \cdot 2^3 \cdot 28 = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\mathbb{P}(G_2) = 1 - (\mathbb{P}(G_0) + \mathbb{P}(G_1)) = 1 - \frac{5+8}{15} = \frac{2}{15}.$$

**b1)** Calcolare

$$\mathbb{P}(G_1|H_0) \text{ e } \mathbb{P}(G_1 \cap H_0), \quad \mathbb{P}(G_2|H_0) \text{ e } \mathbb{P}(G_2 \cap H_0), \quad \mathbb{P}(G_2|H_1) \text{ e } \mathbb{P}(G_2 \cap H_1).$$

Analogamente al punto precedente

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(G_1|H_0) &= \frac{\binom{4}{1} \binom{4}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{4 \cdot 4}{28} = \frac{16}{28} = \frac{4}{7} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(G_1 \cap H_0) = \mathbb{P}(H_0) \mathbb{P}(G_1|H_0) = \frac{15}{45} \frac{16}{28} = \frac{2^4 \cdot 3 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{4}{21}, \\
 \mathbb{P}(G_2|H_0) &= \frac{\binom{4}{2} \binom{4}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{6 \cdot 1}{28} = \frac{6}{28} = \frac{3}{14} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) = \mathbb{P}(H_0) \mathbb{P}(G_2|H_0) = \frac{15}{45} \frac{6}{28} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{14}, \\
 \mathbb{P}(G_2|H_1) &= \frac{\binom{3}{2} \binom{5}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{28} = \frac{3}{28} \quad \text{e} \quad \mathbb{P}(G_2 \cap H_1) = \mathbb{P}(H_1) \mathbb{P}(G_2|H_1) = \frac{24}{45} \frac{3}{28} \frac{2^3 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{2}{35}.
 \end{aligned}$$

Si ponga  $E$  l'evento {nel secondo turno di estrazioni vengono estratte **più** palline rosse che nel primo turno}.

(N.B. si intende un numero di palline rosse **strettamente** maggiore)

**b2)** Esprimere l'evento  $E$  in termini di  $H_k$  e  $G_l$ , e calcolare  $\mathbb{P}(E)$ .

L'evento

$$E = (G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)$$

in quanto si verifica solo se al primo turno si estraggono tutte palline verdi e al secondo turno si estraggono 1 pallina rossa oppure 2 palline rosse o ancora se al primo turno si estrae 1 pallina rossa e al secondo turno se ne estraggono 2. Di conseguenza

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(E) &= \mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1) = \frac{15}{45} \frac{16}{28} + \frac{15}{45} \frac{6}{28} + \frac{24}{45} \frac{3}{28} \\
 &= \frac{1}{45 \cdot 28} (15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3) = \frac{1}{45 \cdot 28} (15 \cdot 22 + 72) = \frac{330 + 72}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} \\
 &= \frac{402}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 67}{3^2 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 7} = \frac{67}{210}
 \end{aligned}$$

c) Calcolare  $\mathbb{P}(H_k|E)$ , per  $k = 0, 1, 2$ .

Si ha ovviamente che  $\mathbb{P}(H_k|E) = \frac{\mathbb{P}(H_k \cap E)}{\mathbb{P}(E)}$ , e quindi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_0|E) &= \frac{\mathbb{P}(H_0 \cap [(G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)])}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0))}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} = \frac{\mathbb{P}((G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0))}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\frac{15}{45} \frac{16}{28} + \frac{15}{45} \frac{6}{28}}{\frac{15}{45} \frac{16}{28} + \frac{15}{45} \frac{6}{28} + \frac{24}{45} \frac{3}{28}} = \frac{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6}{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3} = \frac{330}{330 + 72} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 67} = \frac{55}{67}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1|E) &= \frac{\mathbb{P}(H_1 \cap [(G_1 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_0) \cup (G_2 \cap H_1)])}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(G_2 \cap H_1)}{\mathbb{P}(G_1 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_0) + \mathbb{P}(G_2 \cap H_1)} \\ &= \frac{\frac{24}{45} \frac{3}{28}}{\frac{15}{45} \frac{16}{28} + \frac{15}{45} \frac{6}{28} + \frac{24}{45} \frac{3}{28}} = \frac{24 \cdot 3}{15 \cdot 16 + 15 \cdot 6 + 24 \cdot 3} = \frac{72}{330 + 72} = \frac{2^3 \cdot 3^2}{2 \cdot 3 \cdot 67} = \frac{12}{67}; \end{aligned}$$

Come del resto si poteva dedurre subito considerando che infine deve essere

$$\mathbb{P}(H_2|E) = 0 \left( = \frac{\mathbb{P}(H_2 \cap E)}{\mathbb{P}(E)} \right),$$

in quanto, **se** al secondo turno sono uscite un numero di palline strettamente maggiore rispetto al primo turno, allora è impossibile che al primo turno siano uscite 2 palline rosse (alternativamente poiché  $\mathbb{P}(H_2 \cap E) = 0$ ), e quindi

$$\mathbb{P}(H_1|E) = 1 - \mathbb{P}(H_0|E) = 1 - \frac{55}{67} = \frac{12}{67}.$$

*IN ALTERNATIVA (se non si sa rispondere alla precedente domanda)*

c') Calcolare  $\mathbb{P}(H_k|G_2)$ , per  $k = 0, 1, 2$ .

Si tratta di calcolare

$$\mathbb{P}(H_k|G_2) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(G_2|H_k)}{\mathbb{P}(G_2)}$$

utilizzando le espressioni delle probabilità  $\mathbb{P}(H_k)$  e  $\mathbb{P}(G_2|H_k)$  coinvolte, e la cui espressione è stata calcolata nei punti precedenti ( punti **a1**) e **a2** ).

Effettuati i conti si ha che

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_0|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_0)\mathbb{P}(G_2|H_0)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{15}{28} \\ \mathbb{P}(H_1|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(G_2|H_1)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{12}{28} \\ \mathbb{P}(H_2|G_2) &= \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(G_2|H_2)}{\mathbb{P}(G_2)} = \frac{1}{28}. \end{aligned}$$

È interessante notare che ci si poteva aspettare questo risultato in quanto, per motivi di simmetria (scambiando il ruolo della prima e della seconda pallina estratta con quello della terza e della quarta pallina estratta il risultato non cambia) deve essere

$$\mathbb{P}(H_k|G_2) = \mathbb{P}(G_k|H_2) = \frac{\binom{2}{k} \binom{6}{2-k}}{\binom{8}{2}} = \frac{\binom{2}{k} \binom{6}{2-k}}{\binom{8}{2}} = \begin{cases} \frac{1 \cdot 15}{28} = \frac{15}{28} & \text{se } k = 0, \\ \frac{2 \cdot 6}{28} = \frac{12}{28} & \text{se } k = 1, \\ \frac{1 \cdot 1}{28} = \frac{1}{28} & \text{se } k = 2. \end{cases}$$