CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ ($1^o$ modulo)
- PROVA d'esame del 3/02/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

**ESERCIZIO 0** Un programma contiene in totale un numero (aleatorio) $M$ di errori. Il programma viene controllato, e si supponga che ciascun errore possa essere trovato con probabilità $p = 3/4$, ed indipendentemente l'uno dall'altro, e dal numero totale $M$ degli errori. Sia $X$ il numero di errori trovati, e sia $Y = M - X$ il numero di errori non trovati.
**NOTA BENE** La variabile aleatoria $M$ assume valori in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, ma per semplicità si inizi considerando il caso in cui $M$ può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3\}$.
**a1)** Individuare $P(X = k|M = m)$ e $P(X = k, Y = h|M = m)$, specificando quali sono i valori di $k$ e di $h$ per cui è diversa da zero.
**a2)** Nel caso in cui $M$ sia uniforme in $\{0, 1, 2, 3\}$, calcolare la probabilità che $M$ sia 2, **sapendo che** sono stati trovati due errori (esattamente).
**b1)** Nel caso in cui $M$ sia uniforme in $\{0, 1, 2, 3\}$, calcolare la densità discreta congiunta di $(X, Y)$ (non condizionata).
**b2)** Le variabili aleatorie $X$ ed $Y$ sono indipendenti?
**c)** Nel caso in cui la probabilità di scovare un errore sia $p \in (0, 1)$ generico ed $M$ sia una v.a. di Poisson di parametro $\lambda$, mostrare che $X$ ed $Y$ sono indipendenti.

**ESERCIZIO 1**. Siano $U$ e $V$ due variabili aleatorie con momento primo e secondo finiti e uguali. Siano $W = U + V$ e $Z = U - V$.

**a)** Mostrare che $cov(W, Z) = 0$.

Si supponga ora che $U$ e $V$ siano due variabili aleatorie **indipendenti**, a valori in $\{-1, 0, +1\}$ con la stessa densità discreta:

$$p(-1) = \frac{1}{4}, \qquad p(0) = \frac{1}{4}, \qquad p(+1) = \frac{1}{2}.$$

**b1)** Calcolare la densità congiunta $p_{W,Z}(w, z)$ di $(W, Z)$.
**b2)** Le variabili $W$ e $Z$ sono indipendenti?
**c1)** Calcolare $E(E(W|Z))$.
**c2)** **FACOLTATIVO** Calcolare $E(W|Z = z)$, per i valori per cui ha senso.

**ESERCIZIO 2** Si supponga che $U$ e $V$ siano due variabili aleatorie **indipendenti**, e con densità gaussiana standard (ovvero con legge $N(0, 1)$).
**a)** Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_W(u)$ di $W = U + V$ e la funzione caratteristica $\varphi_Z(u)$ di $Z = U - V$ e mostrare che sia $W$ che $Z$ sono gaussiane $N(0, 2)$.
**b)** Mostrare che $W$ e $Z$ sono gaussiane $N(0, 2)$ ed indipendenti, calcolando la densità congiunta $f_{W,Z}(w, z)$ di $(W, Z)$.
**c)** Tenendo conto del risultato del punto precedente, trovare $E(W|Z)$.

**ESERCIZIO 3** Sia $U$ come nell'esercizio precedente. Sia

$$X_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\, U + 1$$

**a)** Mostrare che $X_n$ converge in distribuzione ad una variabile aleatoria gaussiana $N(1, 1/4)$

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ ($1^o$ modulo)
- **FOGLIO RISPOSTE - PROVA d'esame** del 3/02/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)
NOME........................................ COGNOME................................................

**ESERCIZIO 0**.

**a1)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**a2)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**b1)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**b2)** indipendenti ☐ non indipendenti ☐

**c)** svolto ☐ non svolto ☐

**ESERCIZIO 1**.

**a)** svolto ☐ non svolto ☐

**b1)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**b2)** indipendenti ☐ non indipendenti ☐

**c1)** $E(E(W|Z)) = \ldots$

**c2) FACOLTATIVO**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**ESERCIZIO 2**.

**a)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**b)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**c)**
.....................................................................................................................
.....................................................................................................................

**ESERCIZIO 3**.

**a)** svolto ☐ non svolto ☐

CORSO DI CALCOLO DELLE PROBABILITÀ ($1^o$ modulo)
- PROVA d'esame del 3/02/2003
- Laurea Quadriennale in Matematica - (Prof. Nappo)

Scrivere su ogni foglio NOME e COGNOME. Le risposte devono essere giustificate sui fogli protocollo e riportate nel foglio RISPOSTE.

**ESERCIZIO 0** *Un programma contiene in totale un numero (aleatorio) $M$ di errori. Il programma viene controllato, e si supponga che ciascun errore possa essere trovato con probabilità $p = 3/4$, ed indipendentemente l'uno dall'altro, e dal numero totale $M$ degli errori. Sia $X$ il numero di errori trovati, e sia $Y = M - X$ il numero di errori non trovati.*
***NOTA BENE*** *La variabile aleatoria $M$ assume valori in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, ma per semplicità si inizi considerando il caso in cui $M$ può assumere solo i valori $\{0, 1, 2, 3\}$.*
**a1)** *Individuare $P(X = k|M = m)$ e $P(X = k, Y = h|M = m)$, specificando quali sono i valori di $k$ e di $h$ per cui è diversa da zero.*

**RISPOSTA** Si può procedere in modo più modellistico dicendo che le informazioni del testo significano che se il numero di errori nel programma sono $m$ allora gli eventi $\{Viene\,trovato\,\text{l'}i\text{−esimo}\,errore\}$ formano uno schema di prove ripetute e quindi, rispetto alla probabilità condizionata all'evento $\{M = m\}$, il numero $X$ di errori trovati una legge binomiale $B(m, p)$ con $p = 3/4$. Ovvero

$$P(X = k|M = m) = \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k}, \qquad 0 \le k \le m.$$

**Alternativamente**, si può procedere così:
Innanzi tutto $X = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}_{A_i}$ dove $A_i = \{Viene\,trovato\,\text{l'}i\text{−esimo}\,errore\}$ e le variabili aleatorie $\mathbb{I}_{A_i}$ sono indipendenti da $M$ . Inoltre

$$P(X = k|M = m) = \frac{P(X = k, M = m)}{P(M = m)} = \frac{P(\sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}_{A_i} = k, M = m)}{P(M = m)}$$

$$\text{(sull'evento } \{M = m\} \text{ si ha } \sum_{i=1}^{M} \mathbb{I}_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{A_i})$$

$$= \frac{P(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{A_i} = k, M = m)}{P(M = m)}$$

$$\text{(per l'indipendenza delle variabili } \mathbb{I}_{A_i} \text{ da } M)$$

$$= \frac{P(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{A_i} = k)P(M = m)}{P(M = m)} = P(\sum_{i=1}^{m} \mathbb{I}_{A_i} = k) = \binom{m}{k} p^k (1 - p)^{m-k}, \qquad 0 \le k \le m.$$

Per quanto riguarda, la seconda parte della domanda si osservi che ovviamente devono essere $k, h \ge 0$, e che inoltre l'evento $\{X = k, Y = h, M = m\} = \emptyset$ per $k + h \ne m$, mentre $\{X = k, Y = h, M = m\} = \{X = k, M = m\}$ per $k + h = m$. Quindi

$$P(X = k, Y = h|M = m) = \begin{cases} P(X = k|M = m) \text{ per } k, h \ge 0 \text{ e } m = k + h \\ 0, \text{ altrimenti.} \end{cases}$$

**a2)** *Nel caso in cui $M$ sia uniforme in $\{0, 1, 2, 3\}$, calcolare la probabilità che $M$ sia 2,* ***sapendo che*** *sono stati trovati due errori (esattamente).*

**RISPOSTA**

$$P(M=2|X=2) = \frac{P(X=2|M=2)P(M=2)}{P(X=2)} = \frac{P(X=2|M=2)P(M=2)}{\sum_m P(X=2|M=m)P(M=m)}$$

Tenendo conto che, nel nostro caso $P(M=m)=0$ per $m \geq 4$, e che $P(X=2|M=m)=0$ per $m \leq 1$ si ha allora che

$$\begin{aligned} P(M=2|X=2) &= \frac{P(X=2|M=2)P(M=2)}{\sum_{m=2,3} P(X=2|M=m)P(M=m)} \\ &= \frac{\binom{2}{2}p^2\frac{1}{4}}{\binom{2}{2}p^2\frac{1}{4} + \binom{3}{2}p^2(1-p)\frac{1}{4}} = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}(1-p)} = \frac{1}{1+3(1-p)} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

**b1)** *Nel caso in cui $M$ sia uniforme in $\{0,1,2,3\}$, calcolare la densità discreta congiunta di $(X,Y)$ (non condizionata).*

**RISPOSTA** Per la formula delle probabiltà totali si ha, per $k,h \geq 0$

$$\begin{aligned} P(X=k, Y=h) &= \sum_m P(X=k, Y=h|M=m)P(M=m) \\ &= P(X=k, Y=h|M=k+h)P(M=k+h), \end{aligned}$$

in quanto $P(X=k,Y=h|M=m) \neq 0$ solo se $k+h=m$. Inoltre $P(M=k+h) \neq 0$ solo per $h+k \leq 3$. Quindi, nel caso considerato

$$P(X=k,Y=h) = \binom{k+h}{k} p^k (1-p)^h \frac{1}{4}, \qquad \text{per } k,h \geq 0,\ h+k \leq 3$$

**b2)** *Le variabili aleatorie $X$ ed $Y$ sono indipendenti?*

**RISPOSTA** Le variabili aleatorie, in questo caso, non sono indipendenti perché ad esempio

$$P(X=3, Y=3) \neq P(X=3)P(Y=3),$$

infatti $P(X=3,Y=3)=0$, mentre[1] $P(X=3)>0$ e $P(Y=3)>0$.
Si noti che il punto cruciale della precedente verifica della dipendenza di $X$ ed $Y$, risiede nel fatto che $M$ è a valori in un insieme limitato.

**c)** *Nel caso in cui la probabilità di scovare un errore sia $p \in (0,1)$ generico ed $M$ sia una v.a. di Poisson di parametro $\lambda$, mostrare che $X$ ed $Y$ sono indipendenti.*

**RISPOSTA** Questo è un modello classico in probabilità: come già visto nel punto precedente

$$P(X=k,Y=h) = P(X=k,Y=h|M=k+h)P(M=k+h), \text{ per } k,h \geq 0.$$

Qui non ci sono altre limitazioni perché una variabile di Poisson assume valori in tutti i naturali (0 incluso).

---

[1] Infatti $P(X=3) = P(X=3,Y=0) = \binom{3}{3}p^3(1-p)^0\frac{1}{4} = \frac{3^3}{4^4}$ e $P(Y=3) = P(X=0,Y=3) = \binom{3}{0}p^0(1-p)^3\frac{1}{4} = \frac{1}{4^4}$

Quindi, per $k, h \geq 0$

$$\begin{aligned}
P(X=k, Y=h) &= P(X=k, Y=h|M=k+h)P(M=k+h) \\
&= \binom{k+h}{k} p^k (1-p)^h \frac{\lambda^{k+h}}{(k+h)!} \mathrm{e}^{-\lambda} = \frac{(k+h)!}{k!\ h!} p^k (1-p)^h \frac{\lambda^k \lambda^h}{(k+h)!} \mathrm{e}^{-\lambda} \\
&= \frac{1}{k!} (\lambda\ p)^k \frac{1}{h!} (\lambda(1-p))^h \mathrm{e}^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Ciò dimostra direttamente l'indipendenza.[2] Inoltre

$$P(X=k) = \sum_h \frac{1}{k!} (\lambda\ p)^k \frac{1}{h!} (\lambda(1-p))^h \mathrm{e}^{-\lambda} = C \frac{1}{k!} (\lambda\ p)^k,$$

Quindi $C = \mathrm{e}^{-\lambda\ p}$ ed $X$ è una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda p$. Analogamente si ottiene che $Y$ è una v.a. con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda(1-p)$.

**ESERCIZIO 1**. *Siano $U$ e $V$ due variabili aleatorie con momento primo e secondo finiti e uguali. Siano $W = U + V$ e $Z = U - V$.*

**a)** *Mostrare che $cov(W, Z) = 0$.*
**RISPOSTA** Tenendo conto che $W = U + V$ e $Z = U - V$, si ha

$$Cov(W, Z) = Cov(U+V, U-V) = Cov(U, U) - Cov(U, V) + Cov(V, U) - Cov(V, V) = Var(U) - Var(V)$$

Dai dati del problema sappiamo che $E(U) = E(V)$, $E(U^2) = E(V^2)$, e quindi[3] $Var(U) = E(U^2) - E^2(U) = E(V^2) - E^2(V) = Var(V)$. Di conseguenza $Cov(W, Z) = Var(U) - Var(V) = 0$.

---

[2]Ogni volta che per due variabili aleatorie discrete $X$ ed $Y$ la densità congiunta discreta $p_{X,Y}(x, y)$ si fattorizza come prodotto di due funzioni $r(x)$ ed $s(y)$, cioè $p_{X,Y}(x, y) = r(x)s(y)$ , allora si ha l'indipendenza. Infatti $P(X = x, Y = y) = r(x)s(y)$ e quindi

$$P(X=x) = \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_y r(x)s(y) = r(x) \sum_y s(y) = r(x)C,$$

dove $C = \sum_y s(y)$. Analogamente

$$P(Y=y) = \sum_x P(X=x, Y=y) = \sum_x r(x)s(y) = s(y) \sum_x r(x) = s(y)L,$$

dove $L = \sum_x r(x)$. Quindi

$$\begin{aligned}
&P(X=x, Y=y) = r(x)s(y) = r(x)C\frac{1}{C}s(y)L\frac{1}{L} = P(X=x)\frac{1}{C}P(Y=y)\frac{1}{L} \\
&= P(X=x)P(Y=y)\frac{1}{CL}.
\end{aligned}$$

Infine $CL = 1$ infatti sommando su $x$ ed $y$ ambo i membri della precedente uguaglianza si ha

$$1 = \sum_x \sum_y P(X=x, Y=y) = \sum_x \sum_y P(X=x)P(Y=y)\frac{1}{CL} = \sum_x P(X=x) \sum_y P(Y=y)\frac{1}{CL} = 1 \cdot 1 \frac{1}{CL}.$$

[3]Si ricordi che $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$, infatti

$$\begin{aligned}
&Cov(X, Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E\big[XY - E(X)Y - XE(Y) + E(X)E(Y)\big] \\
&= E[XY] - E[E(X)Y] - E[XE(Y)] + E[E(X)E(Y)] = E[XY] - E(X)E[Y] - E(Y)E[X] + E(X)E(Y) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y)
\end{aligned}$$

e che analogamente

$$Var(X) = Cov(X, X) = E(XX) - E(X)E(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

*Si supponga ora che $U$ e $V$ siano due variabili aleatorie* ***indipendenti***, *a valori in* $\{-1, 0, +1\}$ *con la stessa densità discreta*:

$$p(-1) = \frac{1}{4}, \qquad p(0) = \frac{1}{4}, \qquad p(+1) = \frac{1}{2}.$$

**b1)** *Calcolare la densità congiunta* $p_{W,Z}(w,z)$ di $(W,Z)$.
**RISPOSTA** Essendo $U$ e $V$ indipendenti con

$$P(U=0) = P(U=-1) = P(V=0) = P(V=-1) = 1/4, \quad P(U=1) = P(V=1) = 1/2$$

$$\begin{aligned}
P\big((W,Z) = (\ \ 0, \ \ 0)\big) &= P\big((U,V) = (\ \ 0, \ \ 0)\big) = 1/16 \\
P\big((W,Z) = (-2, \ \ 0)\big) &= P\big((U,V) = (-1, -1)\big) = 1/16 \\
P\big((W,Z) = (-1, \ \ 1)\big) &= P\big((U,V) = (\ \ 0, -1)\big) = 1/16 \\
P\big((W,Z) = (-1, -1)\big) &= P\big((U,V) = (-1, \ \ 0)\big) = 1/16 \\
P\big((W,Z) = (\ \ 0, -2)\big) &= P\big((U,V) = (-1, \ \ 1)\big) = 1/8 \\
P\big((W,Z) = (-2, \ \ 0)\big) &= P\big((U,V) = (-1, -1)\big) = 1/8 \\
P\big((W,Z) = (\ \ 1, \ \ 1)\big) &= P\big((U,V) = (\ \ 1, \ \ 0)\big) = 1/8 \\
P\big((W,Z) = (\ \ 0, \ \ 2)\big) &= P\big((U,V) = (\ \ 0, -1)\big) = 1/8 \\
P\big((W,Z) = (\ \ 2, \ \ 0)\big) &= P\big((U,V) = (\ \ 1, \ \ 1)\big) = 1/4
\end{aligned}$$

come si vede da un calcolo diretto oppure dall'osservare che

$$u + v = w, \quad u - v = z \quad \text{se e solo se} \quad 2u = w + z, \quad 2v = w - z,$$

e quindi

$$P\big((W,Z) = (w,z)\big) = P\big((U,V) = (\frac{w+z}{2}, \frac{w-z}{2})\big) = P\big(U = \frac{w+z}{2}\big)P\big(V = \frac{w-z}{2}\big)$$

**b2)** *Le variabili $W$ e $Z$ sono indipendenti?*

**RISPOSTA** Le variabili aleatorie $W$ e $Z$ non sono indipendenti infatti[4], ad esempio, $P(W=2) > 0 (= 1/4)$ $P(Z=2) > 0 (= 1/8)$, ma $P(W=2, Z=2) = 0$, e quindi $P(W=2, Z=2) \neq P(W=2)P(Z=2)$.

[4]Si ricorda che per due variabili aleatorie discrete $X$ ed $Y$, l'indipendenza equivale alla fattorizzazione della densità discreta congiunta:

$$p_{X,Y}(x,y) = p_X(x)p_Y(y) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{I}(X) \text{ ed } y \in \mathcal{I}(Y)\ ,$$

dove $\mathcal{I}(X)$ è l'immagine di $X$, ovvero l'insieme dei valori ammissibili per $X$, cioè che $X$ può assumere. Equivalentemente si ha l'indipendenza di $X$ e $Y$ se e solo se

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y) \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{I}(X) \text{ ed } y \in \mathcal{I}(Y)\ .$$

Per mostrare che $X$ ed $Y$ sono indipendenti bisogna quindi controllare tutte le coppie dei valori ammissibili, mentre per mostrare che NON SONO INDIPENDENTI, BASTA trovare una coppia di valori $x_0$ ed $y_0$, per i quali $P(X=x_0, Y=y_0) \neq P(X=x_0)P(Y=y_0)$.
Un caso particolarmente facile si ha quando, come in questo esercizio, si ha una coppia di valori $(x_0, y_0)$ che non è ammissibile per la coppia di variabili aleatorie $(X,Y)$, e quindi $P(X=x_0, Y=y_0) = 0$, mentre ciascuno dei due valori è ammissibile per la rispettiva marginale, o meglio $P(X=x_0) > 0$ e $P(Y=y_0) > 0$

**c1)** Calcolare $E(E(W|Z))$.
**RISPOSTA** È noto[5] che $E(E(X|Y)) = E(X)$. Nel nostro caso quindi

$$E(E(W|Z)) = E(W) = E(U) + E(V) = 2E(U) = 2\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

in quanto $U$ e $V$ hanno la stessa distribuzione e quindi lo stesso valore atteso e

$$E(U) = (-1)P(U = -1) + 0P(U = 0) + 1P(U = 1) = (-1)\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

**c2) FACOLTATIVO** Calcolare $E(W|Z = z)$, per i valori per cui ha senso.

**RISPOSTA** Per calcolare la media condizionata $E(W|Z = z)$, bisogna calcolare prima la densità discreta condizionale

$$p_{W|Z}(w|z) = P(W = w|Z = z) = \frac{P(W = w, Z = z)}{P(Z = z)}$$

per i valori ammissibili di $Z$, ovvero per $z = -2, -1, 0, 1, 2$.

**z=-2** $\boldsymbol{E(W|Z = -2) = 0}$

Infatti l'unico $w$ per cui $P(W = w, Z = -2) > 0$ è $w = 0$:

$$P(W = 0|Z = -2) = \frac{P(W = 0, Z = -2)}{P(Z = -2)} = 1$$

e quindi

$$P(W = w|Z = -2) = \frac{P(W = w, Z = -2)}{P(Z = -2)} = 0$$

per tutti gli altri valori $w \neq 0$, per cui $E(W|Z = -2) = 0P(W = 0|Z = -2) = 0$.

---

[5] Per mostrare che $E(E(X|Y)) = E(X)$, nel caso delle variabili aleatorie discrete, basta notare che

$$E(E(X|Y)) = \sum_{y \in \mathcal{I}(Y)} E(X|\{Y = y\})P(Y = y)$$

Inoltre

$$E(X|Y = y) = \sum_{x \in \mathcal{I}(X)} xP(X = x|\{Y = y\})$$

e quindi

$$E(E(X|Y)) = \sum_{y \in \mathcal{I}(Y)} \sum_{x \in \mathcal{I}(X)} xP(X = x|\{Y = y\})P(Y = y)$$

scambiando l'ordine delle sommatorie (si può scambiare l'ordine se i valori ammissibili sono un numero finito, o se le sommatorie convergono in valore assoluto) e si ottiene

$$\begin{aligned} E(E(X|Y)) &= \sum_{x \in \mathcal{I}(X)} \sum_{y \in \mathcal{I}(Y)} xP(X = x|\{Y = y\})P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{I}(X)} x \sum_{y \in \mathcal{I}(Y)} P(X = x|\{Y = y\})P(Y = y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{I}(X)} xP(X = x) = E(X), \end{aligned}$$

in quanto, per la formula dele probabilità totali, si ha

$$\sum_{y \in \mathcal{I}(Y)} P(X = x|\{Y = y\})P(Y = y) = P(X = x)$$

**z=-1** $\boldsymbol{E(W|Z=-1)=\frac{1}{3}}$

Infatti gli unici valori $w$ per cui $P(W=w,Z=-1)>0$ sono $w=-1$ e $w=1$. Quindi

$$\begin{aligned} P(W=w|Z=-1) &= \frac{P(W=w,Z=-1)}{P(Z=-1)} = \frac{P(W=w,Z=-1)}{P(W=-1,Z=-1)+P(W=1,Z=-1)} \\ &= cost\ P(W=w,Z=-1) \end{aligned}$$

ovvero[6]

$$\begin{aligned} P(W=-1|Z=-1) &= cost\ P(W=-1,Z=-1) = cost\ \frac{1}{16} \\ P(W=1|Z=-1) &= cost\ P(W=1,Z=-1) = cost\ \frac{1}{8} = cost\ \frac{2}{16} \end{aligned}$$

da cui

$$P(W=-1|Z=-1) = Cost\ 1 \qquad P(W=1|Z=-1) = Cost\ 2$$

e quindi, tenendo conto che $P(W=w|Z=-1)$ è una densità discreta in $w$, , ovvero che

$$\sum_{w\in\mathcal{I}(W)} P(W=w|Z=-1) = 1,$$

si ottiene

$$P(W=-1|Z=-1) = 1/3 \qquad P(W=1|Z=-1) = 2/3.$$

A questo punto

$$E(W|Z=-1) = (-1)P(W=-1|Z=-1) + 1P(W=1|Z=-1) = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

**z=0** $\boldsymbol{E(W|Z=0)=1}$

Infatti

$$\begin{aligned} P(W=-2|Z=0) &= cost\ P(W=-2,Z=0) = cost\ \frac{1}{16} = Cost\ 1 \\ P(W=0|Z=0) &= cost\ P(W=0,Z=0) = cost\ \frac{1}{16} = Cost\ 1 \\ P(W=2|Z=0) &= cost\ P(W=2,Z=0) = cost\ \frac{1}{4} = cost\ \frac{4}{16} = Cost\ 4 \end{aligned}$$

da cui, tenendo conto che $P(W=w|Z=0)$ è una densità discreta in $w$, ovvero che

$$\sum_{w\in\mathcal{I}(W)} P(W=w|Z=0) = 1$$

---

[6]Nel caso dell'esercizio, per $z=-1$ si ha

$$cost\ = \frac{1}{P(W=-1,Z=-1)+P(W=1,Z=-1)}.$$

In generale, per due variabili aleatorie discrete $X$ ed $Y$ si ha

$$\begin{aligned} P(X=x|Y=y) &= \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} = \frac{P(X=x,Y=y)}{\sum_{x'\in\mathcal{I}(X)} P(X=x',Y=y)} \\ &= cost\ P(X=x,Y=y) \end{aligned}$$

dove

$$cost\ = \frac{1}{\sum_{x'\in\mathcal{I}(X)} P(X=x',Y=y)}.$$

si ottiene

$$P(W = -2|Z = 0) = 1/6$$
$$P(W = 0|Z = 0) = 1/6$$
$$P(W = 2|Z = 0) = 4/6 (= 2/3)$$

e di conseguenza

$$\begin{aligned} E(W|Z = 0) &= (-2)P(W = -2|Z = 0) + 0P(W = 0|Z = 0) + 2P(W = 2|Z = 0) \\ &= (-2)\frac{1}{6} + 0 + 2\frac{4}{6} = \frac{-2+8}{6} = 1. \end{aligned}$$

**z=1** $\boldsymbol{E(W|Z = 1) = 1/3}$

Infatti, analogamente al caso $z = -1$ si ha

$$P(W = -1|Z = 1) = cost\ P(W = -1, Z = 1) = cost\ \frac{1}{16}$$
$$P(W = 1|Z = 1) = cost\ P(W = 1, Z = 1) = cost\ \frac{1}{8} = cost\ \frac{2}{16}$$

e quindi la densità discreta condizionale di $W$ dato $Z = 1$ coincide con la densità discreta condizionale di $W$ dato $Z = -1$, ovvero $P(W = w|Z = 1) = P(W = w|Z = -1)$, e quindi anche per il valore atteso condizionale si ha $E(W|Z = 1) = E(W|Z = -1) = 1/3$.

**z=2** $\boldsymbol{E(W|Z = 2) = 0}$

Infatti, analogamente al caso $z = -2$ si ha $E(W|Z = 2) = 0$, in quanto l'unico $w$ per cui $P(W = w, Z = 2) > 0$ è $w = 0$.

**ESERCIZIO 2** *Si supponga che $U$ e $V$ siano due variabili aleatorie* ***indipendenti****, e con densità gaussiana standard (ovvero con legge $N(0, 1)$).*
**a)** *Calcolare la funzione caratteristica $\varphi_W(u)$ di $W = U + V$ e la funzione caratteristica $\varphi_Z(u)$ di $Z = U - V$ e mostrare che sia $W$ che $Z$ sono gaussiane $N(0, 2)$.*

**RISPOSTA** Essendo $U$ e $V$ entrambe v.a. Gaussiane standard, si ha che

$$\varphi_U(u) = \varphi_V(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}$$

essendo inoltre le v.a. $U$ e $V$ indipendenti, si ha

$$\varphi_W(u) = \varphi_{U+V}(u) = \varphi_U(u)\varphi_V(u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

e analogamente

$$\varphi_Z(u) = \varphi_{U-V}(u) = \varphi_U(u)\varphi_{-V}(u) = \varphi_U(u)\varphi_V(-u) = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(-u)^2}{2}} = \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} = \mathrm{e}^{-u^2}$$

da cui si ottiene immediatamente che sia $W$ che $Z$ hanno la stessa distribuzione, avendo la stessa funzione caratteristica, inoltre la distribuzione è di tipo gaussiano di valore atteso $\mu = 0$ e varianza $\sigma^2 = 2$, utilizzando il fatto che in generale per una v.a. $X$ di legge $N(\mu, \sigma^2)$, cioè gaussiana di valore atteso $\mu$ e varianza $\sigma^2$ si ha[7]

$$\varphi_X(u) = E(\mathrm{e}^{iuX}) = \mathrm{e}^{iu\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}},$$

[7] Una v.a. $X$ di legge $N(\mu, \sigma^2)$ ha la stessa distribuzione di $\sigma Y + \mu$ con $Y$ una gaussiana standard, ovvero di legge $N(0, 1)$. Quindi

$$\varphi_X(u) = E(\mathrm{e}^{iuX}) = E(\mathrm{e}^{iu(\sigma Y+\mu)}) = \mathrm{e}^{iu\mu}E(\mathrm{e}^{iu\sigma Y}) = \mathrm{e}^{iu\mu}\varphi_Y(\sigma u) = \mathrm{e}^{iu\mu}\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2 u^2}{2}}$$

e quindi nel nostro caso $\mu = 0$ e $\sigma^2/2 = 1$, ovvero $\sigma^2 = 2$.
**b)** *Mostrare che $W$ e $Z$ sono gaussiane $N(0, 2)$ ed indipendenti, calcolando la densità congiunta $f_{W,Z}(w, z)$ di $(W, Z)$.*

**RISPOSTA** Per iniziare si osservi che

$$u + v = w, \quad u - v = z \quad \text{se e solo se} \quad u = \frac{w+z}{2}, \quad v = \frac{w-z}{2},$$

ovvero

$$g(u, v) = (u + v, u - v) \qquad \text{e } g^{-1}(w, z) = \left(\frac{w+z}{2}, \frac{w-z}{2}\right)$$

Da cui lo Jacobiano di $g^{-1}(w, z)$ vale $-\frac{1}{2}$ e quindi

$$\begin{aligned}
f_{W,Z}(w, z) &= f_{U,V}(g^{-1}(w, z)) \left|J_{g^{-1}}(w, z)\right| \\
&= f_U\left(\frac{w+z}{2}\right) f_V\left(\frac{w-z}{2}\right)\frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(w+z)^2}{2^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{(w-z)^2}{2^2}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left[(w+z)^2+(w-z)^2\right]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{4}\left[w^2+z^2+2wz+w^2+z^2-2wz\right]} \\
&= \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\left[w^2+z^2\right]} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}} \\
&= f_W(w) f_Z(z)
\end{aligned}$$

**c)** *Tenendo conto del risultato del punto precedente, trovare $E(W|Z)$.*

**RISPOSTA** Si ha $E(W|Z) = 0$
Infatti, per il punto precedente si ha che $W$ e $Z$ sono indipendenti, e quindi

$$\bar{f}_{W|Z}(w|z) = \frac{f_{W,Z}(w, z)}{f_Z(z)} = \frac{f_W(w) f_Z(z)}{f_Z(z)} = f_W(w)$$

e quindi

$$\psi(z) := E(W|Z = z) = \int_{\infty}^{\infty} w \bar{f}_{W|Z}(w|z) dw = \int_{\infty}^{\infty} w f_W(w) dw = E(W) \qquad \text{qualunque sia } z$$

Di conseguenza la variabile aleatoria $E(W|Z) := \psi(Z)$ coincide con la costante $E(W) = 0$.

**ESERCIZIO 3** *Sia $U$ come nell'esercizio precedente. Sia*

$$X_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n}\, U + 1$$

**a)** *Mostrare che $X_n$ converge in distribuzione ad una variabile aleatoria gaussiana $N(1, 1/4)$.*
**RISPOSTA**

**I MODO**

Si tratta di dimostrare che per ogni $x$ di continuità per la funzione di distribuzione $F$ di una v.a. gaussiana $N(1, 1/4)$ ( e quindi per ogni $x$) si ha

$$\lim F_{X_n}(x) = F(x).$$

E infatti

$$\begin{aligned}F_{X_n}(x) &= P(X_n \leq x) = P(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}U + 1 \leq x)\\ &= P(U \leq (x-1)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n}) = \Phi((x-1)\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{n})\\ &\longrightarrow \Phi\big((x-1)2\big)\end{aligned}$$

dove $\Phi(x)$ è la funzione di distribuzione (o di ripartizione) di una v.a. gaussiana standard. Basta quindi osservare[8] che una v.a. $X$ di legge $N(\mu, \sigma^2)$ ha la funzione di distribuzione $F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ per ottenere che $\Phi\big((x-1)2\big)$ è la funzione di distribuzione di una v.a. gaussiana di valore atteso $\mu = 1$ e varianza $\sigma^2 = 1/4$ (infatti $1/\sigma = 2$)

**II MODO**

Alternativamente si può utilizzare la funzione caratteristica e mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(u) = \varphi_X(u) = \mathrm{e}^{iu}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}\frac{1}{4}}$$

e infatti

$$\begin{aligned}\varphi_{X_n}(u) &= E(\mathrm{e}^{iu\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}U+1\right)}) = \mathrm{e}^{iu}\varphi_U(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}u)\\ &= \mathrm{e}^{iu}\mathrm{e}^{-\frac{\left(\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}u\right)^2}{2}}\\ &\longrightarrow \mathrm{e}^{iu}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

[8] Una v.a. $X$ di legge $N(\mu, \sigma^2)$ ha la stessa distribuzione di $\sigma Y + \mu$ con $Y$ una gaussiana standard, ovvero di legge $N(0, 1)$, e $\sigma = \sqrt{\sigma^2} > 0$, e quindi

$$\begin{aligned}F(x) &= P(X \leq x) = P(\sigma Y + \mu \leq x)\\ &= P(\sigma Y \leq (x-\mu)) = P(Y \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})\end{aligned}$$