PROGRAMMA DEL CORSO DI

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ ELEMENTARE (MODULO UNICO)

docente: Giovanna Nappo, (ufficio n.109, tel. 49913262, e-mail: nappo@mat.uniroma1.it)
periodo: II Semestre , A. A. 2001/02

Prerequisiti: Nozioni di base di Analisi Matematica e Teoria degli insiemi.

Obiettivi : Acquisizione delle nozioni di base di Probabilità. Con particolare attenzione all'uso della formula di Bayes. Studio di alcuni modelli probabilistici. Descrizione e trasformazioni di variabili aleatorie discrete. Acquisizione dei risultati fondamentali del Calcolo delle Probabilità: Legge dei Grandi Numeri, Teorema di Poisson e applicazione del Teorema Centrale del Limite (di De Moivre-Laplace).

TESTI CONSIGLIATI:

TEORIA:

- G. Dall'Aglio, Calcolo delle Probabilità (II edizione) Zanichelli,2000.
- P. Baldi, Calcolo delle Probabilità e Statistica, (II edizione) Mc Graw Hill.

ESERCIZI:

A. Frigessi, Calcolo delle Probabilità, (serie Tutor), ETAS libri 1994.

M. Cerasoli, Problemi risolti di Calcolo delle Probabilità, Casa Ed.Ambrosiana, Milano, 1992.

ALTRI TESTI CONSIGLIATI per l'approfondimento:

W. Feller, An introduction to probability theory and its applications (Vol 1), Wiley & Sons, 1970

B. De Finetti, Teoria delle Probabilità, Einaudi, 1970; (II volume)

Sono disponibili alcuni APPUNTI delle LEZIONI, manoscritti, che vanno integrati dalla lettura di un testo, e lo Schema delle lezioni del Professor M. Piccioni (sulle pagine dei docenti Nappo e Piccioni, a partire dall'indirizzo http://www.mat.uniroma1.it/persone/). Testi di ESERCIZI e di ESERCIZI d'ESAME, sono disponibili sulla Didattica in rete (http://didnet.mat.uniroma1.it/).

PROGRAMMA:

A. **INTRODUZIONE**:

1. Cenni storici, fenomeni aleatori, grandezze aleatorie, interpretazione delle operazioni booleane su eventi, probabilità di eventi (cenni sulle diverse interpretazioni).

2. Probabilità classica e calcolo combinatorio: Permutazioni, Disposizioni e Combinazioni, con e senza ripetizione.

B. **SPAZI DI PROBABILITA'**: 1. Proprietà assiomatiche delle probabilità, algebre e sigma-algebre di eventi, spazi di probabilità e conseguenze immediate degli assiomi.

2. Formula di inclusione ed esclusione (o di Poincare').

3. Modelli di estrazione casuale da urna con e senza reimbussolamento, con palline di due o piu' colori.

C. **PROBABILITÀ CONDIZIONATE**:

1. Definizione di Probabilità condizionata $P(A|H)$ con $P(H) > 0$.

2. Conseguenze immediate della definizione: formula delle probabilità composte, formula delle probabilità totali, formula di Bayes.

3. La probabilità condizionata come probabilità.

D. **INDIPENDENZA di EVENTI**: 1. Definizione di famiglia di eventi (globalmente) indipendenti e definizione di eventi indipendenti a due a due.

2. Relazione con le probabilità condizionate.

E. **VARIABILI ALEATORIE DISCRETE**:

1. Variabili aleatorie(v.a)discrete e densità discreta (o distribuzione o legge)).

2. Valore Atteso (o Valore Medio o Speranza Matematica). Momenti e Varianza.

3. Famiglie notevoli di variabili aleatorie discrete: Binomiali, Ipergeomentriche, di Poisson, Geometriche (proprietà di mancanza di memoria), di Pascal (o Binomiale negativa), Uniformi.

F. **VARIABILI ALEATORIE MULTIVARIATE (o vettori aleatori)**.

1. Distribuzione congiunta e Distribuzioni marginali.

2. Caso discreto: densità congiunta discreta, marginale e condizionata.

3. Aspettazione condizionata (rispetto alla probabilità condizionata) e Formula del valore atteso della aspettazione condizionata.

4. Distribuzione Multinomiale e Multiipergeometrica.

5. Indipendenza stocastica per variabili aleatorie: definizione e caratterizzazioni nel caso discreto.

G. **TRASFORMAZIONI DI VARIABILI ALEATORIE**:

1. Legge (o distribuzione) di una trasformazione di una variabile aleatoria discreta

2. Conseguenze: Valore atteso di una trasformazione di una v.a., Proprietà di Linearità e Monotonia del Valore Atteso.

3. Covarianza, Varianza della somma di v.a. Indipendenza e non correlazione.

4. Retta di regressione e valore atteso condizionato come migliori approssimazioni.

5. Distribuzione della somma di variabili aleatorie

6. Funzione generatrice delle probabilità e sue proprietà

H. **CONVERGENZA**:

1. Disuguaglianza di Chebishev e Legge debole dei grandi numeri per eventi.

2. Approssimazione di Poisson.

3. Teorema Centrale del Limite (forma locale e forma integrale) di De Moivre-Laplace.(solo enunciati)

4. Approssimazione normale per il numero di successi in prove ripetute (schema di Bernoulli).

5. Relazione tra Legge dei Grandi Numeri e Teorema Centrale del Limite.

RIFERIMENTI DETTAGLIATI dal libro di Dall'Aglio:
Cap. I : tutto, TRANNE
nel paragrafo I.9, le definizioni di liminf e limsup e gli Esempi I.9.3. I.9.4 e I.9.5
nel paragrafo I.10, l'Osservazione I.1o.1
Cap. II : tutto, TRANNE
l'assioma 5, il Teorema II.3.2,
il Teorema II.3.3 (il cui enunciato va preso come assioma)
l'Esempio II.3.1
l'Esempio II.3.2
l'Osservazione II.3.2
l'Esempio II.4.5
il Teorema II.6.3
l'Esempio II.7.3
Va segnalato che tutti gli esempi (esclusi quelli citati sopra) del capitolo II possono essere letti e compresi.
Vanno segnalati in modo particolare (e SONO stati svolti gli ARGOMENTI contenuti in)
l'Esempio II.4.4 (Concordanze) Osservazione II.5.1 (estrazione in blocco e senza ripetizione)
Osservazione II.5.2 (Assiomatizzazione della probabilità condizionata)
Esempio II.7.4 (distribuzione Binomiale)
ATTENZIONE nel libro di Dall'Aglio Bin(n,p) e' sinonimo di Bernoulli di parametri n e p mentre in altri testi (ad esempio Baldi) Bernoulli significa Bin(1,p) cioe' la distribuzione di Bernoulli e' la distribuzione della funzione indicatrice di un evento
Esempio II.7.5 (distribuzione di Poisson)
Esempio II.7.6 (distribuzione ipergeometrica o estrazione in blocco)
Esempio II.7.13 (distribuzione multinomiale)
Cap. III.
Sono state svolte solo le parti relative alle variabili aleatorie discrete. Si consiglia la lettura di
III.1 (senza soffermarsi sulle nozioni di misurabilità e di classi di Borel)
III.2 : seconda metà di pagina 88,
Esempio III.2.2
Esempio III.2.3 (distribuzione geometrica)
Esempio III.2.4 (ritardi del lotto)
Esempi III.2.5, III.2.6, III.2.7
III.3 : Definizione di indipendenza (22)
La condizione necessaria e sufficiente (24)
La definizione di densità discreta condizionata (25)
Esempio III.3.1
Esempio III.3.3
Distribuzione della somma per v.a.indipendenti (32)
Esempio III.3.5
Esempio III.3.6 (fino alla formula (33))
Esempio III.4.7 (somma di due Binomiali Indipendenti)

Esempio III.4.14 (solo i casi (b) geometrica ed (e) Poisson)
Cap IV
IV.1 : saltare i riferimenti alle v.a. ass. cont.
Esempio IV.1.3 (strategia del raddoppio) NON svolto, ma se ne consiglia la lettura Esempio IV.1.4 (impossibilità dei sistemi) NON svolto, ma se ne consiglia la lettura
IV.2 : non e' in programma, ma se ne consiglia la lettura IV.3 : saltare i riferimenti alle v.a. ass. cont. e gli esempi TRANNE
Esempio IV.3.5 (calcolo di valori attesi e varianze di Geometrica, Binomiale, Poisson, Ipergeometrica) si segnala che la dimostrazione della disuguaglianza di Cebicev (o meglio Chebyshev) va adattata al caso discreto
IV.4 : Definizione di v.a. correlate
saltare tutti gli esempi,
Definizioni di distribuzione condizionata e di media condizionata (31) nel caso discreto.
IV.5 : saltare tutto TRANNE Esempio IV.5.7 : distribuzione binomiale negativa (42), o di Pascal (41)
Cap. V
V.1 : pur NON essendo in programma, si segnala l' Esempio V.1.8 (approssimazione binomiale per l'estrazione in blocco)
V.2 : Definizione di convergenza in probabilità (9)
V.3 : saltare tutto
V.4 : tutto, incluse le funzioni generatrici, senza dimostrazioni in particolare vedere gli enunciati di
Teorema V.4.2 (di Bernoulli)
Teorema V.4.3 (di Poisson)
(Dimostrare direttamente che Pr(S(n)=k) converge alla densità di una v.a. di Poisson se n tende ad infinito e p(n) a zero, con np(n) costante)
V.5 : Teorema V.5.2 (Legge dei grandi numeri, di Cebicev)
V.6 : pur NON essendo in programma, si segnalano gli esempi
Esempio V.6.1 (passeggiata aleatoria semplice)
Esempio V.6.2 (rovina del giocatore)