

PROGRAMMA di **METODI PROBABILISTICI PER L'ECONOMIA E LA FINANZA**  
prof. Giovanna Nappo, A.A.2001/02

**Prerequisiti:** corso di base di Probabilità, elementi di teoria della misura e connessioni con la probabilità.

**Obiettivi:** In generale lo scopo del corso è l'acquisizione di elementi di teoria dei processi a tempo discreto e continuo, con in vista le applicazioni alla finanza. In particolare i concetti di martingala e di stopping time.

#### PROGRAMMA DETTAGLIATO

**Elementi di matematica finanziaria:** Tasso di interesse. Prezzi Attualizzati. Mercati completi. Contratti. Arbitraggio. Opzioni put e call. Modello binomiale multiperiodale (o di Cox-Ross-Rubinstein: CCR). Prezzo di Opzioni call con il principio dell'assenza di arbitraggio, in maniera elementare.

**Elementi di Teoria dei processi stocastici.** Teorema di Kolmogorov (solo lo schema di dimostrazione). Esempi di applicazione: processi gaussiani, processo di Wiener, di Markov regolari a incrementi indipendenti. Criterio di Censov-Kolmogorov per la continuità (senza dimostrazione, solo lo schema) con applicazione al processo di Wiener. Variazione quadratica e totale sugli intervalli limitati per il processo di Wiener.

**Elementi di Teoria delle martingale a tempo discreto.** Probabilità condizionali. Probabilità condizionali regolari. Martingale, Submartingale e Supermartingale. Esempi. Decomposizione di Doob. Tempi d'arresto. Disuguaglianza di Kolmogorov. Disuguaglianza di Doob. Teorema di convergenza per martingale. Upcrossing Lemma. Uniforme integrabilità. Rovina del giocatore.

**Elementi di Teoria delle martingale a tempo continuo.** Processi a incrementi indipendenti. Martingala esponenziale. Cenni sui cambi di misura e martingale. Proprietà di Markov forte del Processo di Wiener. Principio di riflessione. Tempi di uscita da una striscia.

**Cenni su Integrale Stocastico.** Differenziale stocastico, con Esempi di equazioni differenziali stocastiche: Equazioni lineari, Processo di Orstein-Uhlenbeck, moto browniano geometrico.

**Rivisitazione del principio di arbitraggio e del prezzo di opzioni attraverso la teoria delle martingale.** Modelli a tempo discreto. Integrale stocastico a tempo discreto (trasformazioni di martingale) come Martingale locali. Condizioni sufficienti affinché una martingala locale sia una martingala (senza dimostrazione). Strategie di investimento autofinanzianti. Copertura finanziaria. Mercati perfetti e completi. Misure martingala equivalenti. Primo Teorema Fondamentale dell'arbitraggio: dimostrazione della condizione sufficiente. Secondo Teorema Fondamentale dell'arbitraggio: dimostrazione della sufficienza della Completezza per l'unicità della Misura martingala equivalente. Dimostrazione della equivalenza tra S-Rappresentabilità e Completezza. Rappresentabilità del modello binomiale multiperiodale (o CCR): esistenza e unicità della misura martingala equivalente.

Testi consigliati:

[M] F. MORICONI. Matematica Finanziaria Edizioni il Mulino. 1995

[R] Sheldon M. ROSS. An introduction to Mathematical Finance. Options and other Topics. Cambridge University Press. 1999

[S] A. N. SHIRYAEV. Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models, Theory. Advances Series on Statistical Sciences and Applied Probability, 3. World Scientific Publishing Co. 1999

[W] D. WILLIAMS. Probability with Martingales. Cambridge University Press. 1991

Infine per approfondimenti sulle Equazioni differenziali stocastiche e per la teoria dei processi stocastici si segnala anche il libro

[B] Paolo BALDI. Equazioni Differenziali Stocastiche e applicazioni. Quaderni dell'Unione Matematica Italiana, 28. Pitagora Editrice, Bologna. II edizione 1999.

Durante il corso sono stati distribuiti appunti su

1. Tasso di interesse. Contratti. Arbitraggio. Prezzo di Opzioni con il principio dell'assenza di arbitraggio. Modello binomiale multiperiodale ( o di Cox-Ross-Rubistein) (vedere anche [R])
2. Teorema di Kolmogorov. Teorema di Censov-Kolmogorov. Processo di Wiener: definizione e continuita'.
3. Probabilita' condizionali. Probabilita' condizionali regolari.
4. Martingale. Decomposizione di Doob. Tempi d'arresto. Disuguaglianza di Kolmogorov. Disuguaglianza di Doob. Rovina del giocatore.  
Processi a incrementi indipendenti. Proprieta' di Markov forte del Processo di Wiener. Principio di riflessione. Tempi di uscita da una striscia.
5. Teorema di convergenza per martingale. Upcrossing Lemma. Uniforme integrabilita'. (vedere anche [W])
6. Appunti manoscritti su Integrale stocastico, Differenziale stocastico, con Esempi di equazioni differenziali stocastiche: Processo di Orstein -Uhlenbeck, moto browniano geometrico, equazioni lineari. (vedere anche [B])
7. Appunti manoscritti su Rivisitazione del principio di arbitraggio e del prezzo di opzioni attraverso la teoria delle martingale (in due parti).
8. Approfondimento su: Modelli a tempo discreto. Integrale stocastico a tempo discreto (trasformazioni di martingale), Martingale locali, Strategie di investimento autofinanzianti, Copertura finanziaria, Primo e Secondo Teorema Fondamentale dell'arbitraggio. (vedere anche [S])