Notazione: se X è uno spazio topologico e $x_0 \in X$ poniamo

$$\Omega(X, x_0) := \{ \underset{\substack{\shortparallel \\ [0,1]}}{I} \xrightarrow{\gamma} X \mid \gamma \text{ continua},\ \gamma(0)=\gamma(1)=x_0 \}$$

Sia $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z|=1 \}$ il cerchio di centro 0 e raggio 1 in $\mathbb{C}$.

Per $n \in \mathbb{Z}$ $\omega_n \in \Omega(S^1, 1)$ è definito così:

$$\begin{aligned} I &\xrightarrow{\omega_n} S^1 \\ s &\longmapsto e^{2\pi i n s} \end{aligned}$$

<u>TEOREMA</u> L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\xrightarrow{\alpha} \pi_1(S^1, 1) \\ n &\longmapsto [\omega_n] \end{aligned}$$

è un isomorfismo di gruppi.

Il teorema segue dai risultati A e B che trovate negli appunti "Gruppo fondamentale cerchio

Per il momento assumiamo la validità di A e B, e dimostriamo il Teorema.

Notazione: $\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1$ $p(\theta) = e^{2\pi i \theta}$

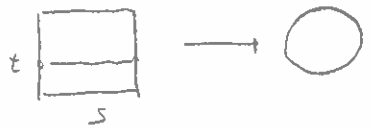
Sia $\begin{aligned} I &\xrightarrow{\tilde{\omega}_n} \mathbb{R} \\ s &\longmapsto ns \end{aligned}$ $n \in \mathbb{Z}$

$\tilde{\omega}_n$ unico sollevamento di ω_n che inizia in 0

$\boxed{\alpha \text{ è iniettiva}}$ Supponiamo che $\alpha(m) = \alpha(n)$ e dimostriamo che $m = n$.

Stiamo assumendo che esiste una omotopia tra ω_m e ω_n, cioè

$$I \times I \xrightarrow{F} S^1 \qquad (F \text{ continua})$$



$F(s,0) = \omega_m(s)$ $\quad F(0,t) = F(1,t) = 1$

$F(s,1) = \omega_n(s)$

Per il risultato B esiste un sollevamento $\tilde{F}$ di F

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \times I \arrow[ur, "\tilde{F}"] \arrow[r, "F"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$p(\theta) = e^{2\pi i \theta}$ $\quad [p \circ \tilde{F} = F]$ con $\tilde{F}(0,0)$

Quindi $\begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ s &\longmapsto \tilde{F}(s,0) \end{aligned}$ sollevamento di ω_m che inizia in 0

e perciò $\tilde{F}(s,0) = \tilde{\omega}_m(s)$

24/04/2025

Inoltre $\tilde{\tilde{F}}(0,t)\in\mathbb{Z}$ $\forall t\in I$ e $\tilde{\tilde{F}}(1,t)\in\mathbb{Z}$ $\forall t\in I$

Siccome $\tilde{\tilde{F}}$ è continua e $\mathbb{Z}$ è discreto

$\tilde{\tilde{F}}(0,t)=\tilde{\tilde{F}}(0,0)=0$ $\forall t\in I$

$\tilde{\tilde{F}}(1,t)=\tilde{\tilde{F}}(1,0)=\tilde{\omega}_n(1)=n$ $\forall t\in I$.

Ma $\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ s\mapsto \tilde{\tilde{F}}(s,1)\end{array}$ è un sollevamento di $\omega_m(s)$

e $\tilde{\tilde{F}}(0,1)=0$, quindi $\tilde{\tilde{F}}(s,1)=\tilde{\omega}_m(s)$ e

perciò $\tilde{\tilde{F}}(1,1)=\tilde{\omega}_m(1)=m$. Quindi

$$n=\tilde{\tilde{F}}(1,1)=m.$$

$\boxed{\alpha \text{ è suriettiva}}$ Sia $[\gamma]\in\pi_1(S^1,1)$, cioè $\gamma\in\Omega(S^1,1)$.

Sia $\tilde{\gamma}:I\to\mathbb{R}$ il sollevamento di γ con $\tilde{\gamma}(0)=0$.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "p"] \\ I \arrow[ur, "\tilde{\gamma}"] \arrow[r, "\gamma"] & S^1 \end{tikzcd}$$

$\begin{cases} p\circ\tilde{\gamma}=\gamma \\ \tilde{\gamma}(0)=0\end{cases}$ Sia $n:=\tilde{\gamma}(1)$.

Allora $\tilde{\omega}_n$ è omotopo a $\tilde{\gamma}$ (omotopia con estremi fissati) perchè

$\tilde{\omega}_n(0)=0=\tilde{\gamma}(0)$ e sono cammini

$\tilde{\omega}_n(1)=n=\tilde{\gamma}(1)$ in $\mathbb{R}$.

Sia $I\times I\xrightarrow{F}\mathbb{R}$ una omotopia tra $\tilde{\omega}_n$ e $\tilde{\gamma}$.

Allora $p\circ F: I\times I\to S^1$ è una omotopia tra ω_n e γ.

$\boxed{\alpha \text{ è un omomorfismo di gruppi}}$

Va dimostrato che se $m,n\in\mathbb{Z}$ allora

$\omega_{m+n}\sim\omega_m*\omega_n$

Sia $\widetilde{\omega_m*\omega_n}:I\to\mathbb{R}$ l'unico sollevament di $\omega_m*\omega_n$ che inizia in 0. Per quello che abbiamo visto nella dim.ne che α è suriettiva basta dim.re che $\widetilde{\omega_m*\omega_n}(1)=m+$

Sia $\begin{array}{l} I\xrightarrow{\eta}\mathbb{R} \\ s\longmapsto m+ns\end{array}$ Allora η è il sollevam di ω_n che inizia in

e $\tilde{\omega}_m*\eta$ è il sollevamento di $\omega_m*\omega_n$ che inizia in 0, cioè

$\tilde{\omega}_m*\eta=\widetilde{\omega_m*\omega_n}$. Siccome $\tilde{\omega}_m*\eta(1)=m+n$ abbiamo finito. //