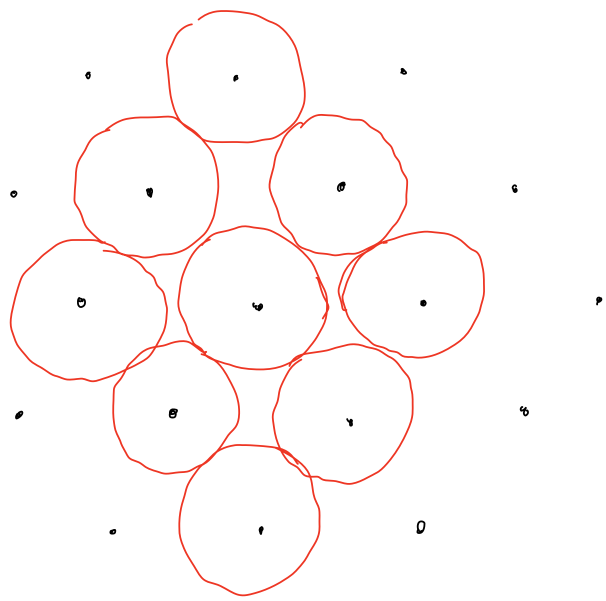
1. Il Problema

Come disponiamo palline da Ping Pong in una scatola in modo da farne entrare il maggior numero possibile?

Per familiarizzarci con il problema, abbassiamo la dimensione, e chiediamoci:

Come disponiamo monete dello stesso valore su un tavolo in modo da farne entrare il maggior numero possibile?

Dopo qualche tentativo, arriveremo alla seguente risposta



Formulazione Matematica in dimensione 2

Sia $P \subset \mathbb{R}^2$ l'unione di dischi dello stesso raggio r,

$$P = \bigcup_{i \in I} D_r^2(a_i),$$

dove $D_r^2(a_i) \subset \mathbb{R}^2$ è il disco chiuso di centro a_i e raggio r,

I è un insieme di indici, e

$$\boxed{\text{se } i \neq j \text{, allora } D^2_r(a_i) \cap D^2_r(a_j) \text{ contiene al più 1 punto.}}$$

Un tale P è un <u>impacchettamento di dischi</u>.

DEF 1

La <u>densità</u> di un impacchettamento di dischi P è il

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{\text{Area}\left(P \cap D^2_R(b)\right)}{\text{Area}\, D^2_R(b)} = \limsup_{R \to +\infty} \frac{\text{Area}\left(P \cap D^2_R(b)\right)}{\pi R^2},$$

dove $b \in \mathbb{R}^2$ è fissato (si vede facilmente che il limite superiore non dipende dal centro b).

<u>OSS 1</u> Sia $P \subset \mathbb{R}^2$ un impacchettamento di dischi di raggio r, e sia

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\xrightarrow{T} \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto \lambda \cdot M \cdot x + c \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\lambda \in \mathbb{R}^* \\ &M \in O_2(\mathbb{R}) \\ &c \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

un'affinità conforme, cioè la composizione di un'isometria e una dilatazione. Allora $T(P)$

è un'impacchettamento di dischi di raggio $|t|\cdot r$.

Si vede subito che

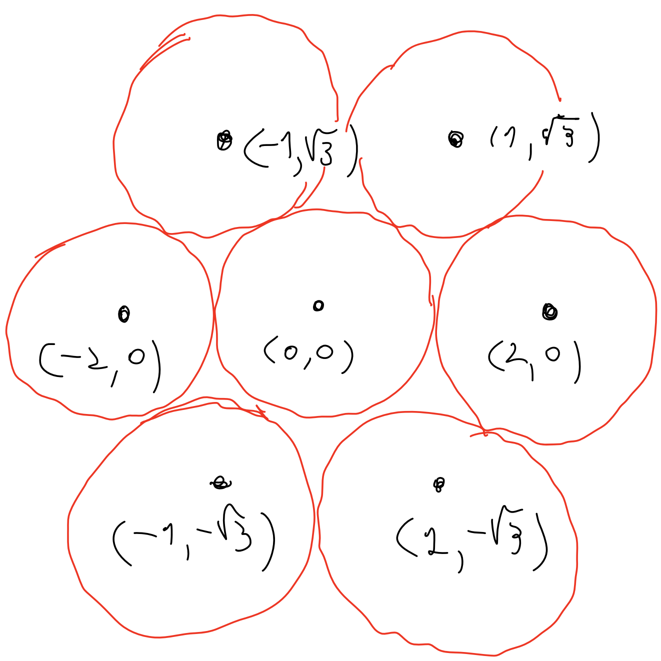
$$\text{densità di } T(P) = \text{densità di } P.$$

Esempio 1 L'impacchettamento di dischi A_2 descritto a p. 1 può essere descritto come segue. I centri dei dischi sono i punti del reticolo

$$\Lambda := \{ a(2,0) + b(-1,\sqrt{3}) \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \}.$$

e il raggio è

$$r = 1.$$



Pessimo disegno, scusatemi!

Nome: A_2

Z Diamo il nome A_2 a qualsiasi impacchettamento ottenuto da quello sopra via la composizione di un'isometria e una dilatazione.

Ora $R \gg 0$. Allora

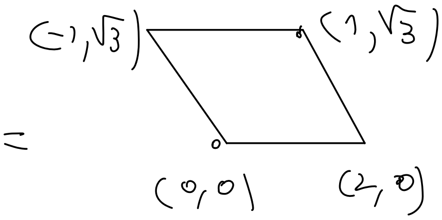
$$\limsup_{R\to+\infty} \frac{\text{Area}\,(P\cap D^2_R(0,0))}{\text{Area}\, D^2_R(0,0)} =$$

$$= \limsup_{R\to+\infty} \frac{|\Lambda\cap D^2_R(0,0)|\cdot \text{Area}\, D_1(0,0)}{\text{Area}\, D^2_R(0,0)} =$$

$$= \pi \cdot \limsup_{R\to+\infty} \frac{|\Lambda\cap D^2_R(0,0)|}{\text{Area}\, D^2_R(0,0)} =$$

$$= \pi \cdot \limsup_{R\to+\infty} \frac{\text{Area}\, D^2_R(0,0) / \text{Area}\, C_\Lambda}{\text{Area}\, D^2_R(0,0)}$$

dove C_Λ è un "parallelogramma fondamentale" di Λ, cioè con lati due vettori di una base (in $\mathbb{Z}$) di Λ, per esempio

$C_\Lambda =$ 

Siccome

$$\text{Area}\, \mathcal{C}_\Lambda = \left| \det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \right| = 2\sqrt{3}$$

vediamo che la densità di A_2 è

$$\frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068\ldots \qquad (*)$$

Il problema in dim=2.

Quale è la densità massimale Δ_2 degli impacchettamenti di dischi? (Cioè l'estremo superiore delle densità di impacchettamenti di dischi?)

Teorema (Thue, 1910)

La densità massimale degli impacchettamenti di dischi è quella di A_2, cioè

$$\Delta_2 = \frac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068\ldots$$

Formulazione Matematica in dimensione n

Sia $P \subset \mathbb{R}^n$ l'unione di sfere dello stesso raggio r

$$P = \bigcup_{i \in I} D^n_r(a_i),$$

dove $D^n_r(a_i) \subset \mathbb{R}^n$ è la sfera chiusa di centro a_i e raggio r,

I è un insieme di indici, e

$$\boxed{\text{se } i \neq j, \text{ allora } D^n_r(a_i) \cap D^n_r(a_j) \text{ contiene al più 1 punto.}}$$

Un tale P è un impacchettamento di sfere.

DEF 2

La densità di un impacchettamento di sfere P è il

$$\limsup_{R \to +\infty} \frac{\text{Area}\left(P \cap D^n_R(b)\right)}{\text{Area } D^n_R(b)},$$

dove $b \in \mathbb{R}^n$ è fissato (si vede facilmente che il limite superiore non dipende dal centro b).

OSS 2 Vale l'analogo dell'Oss. 1 in dimensione arbitraria.

Il problema in dim=n.

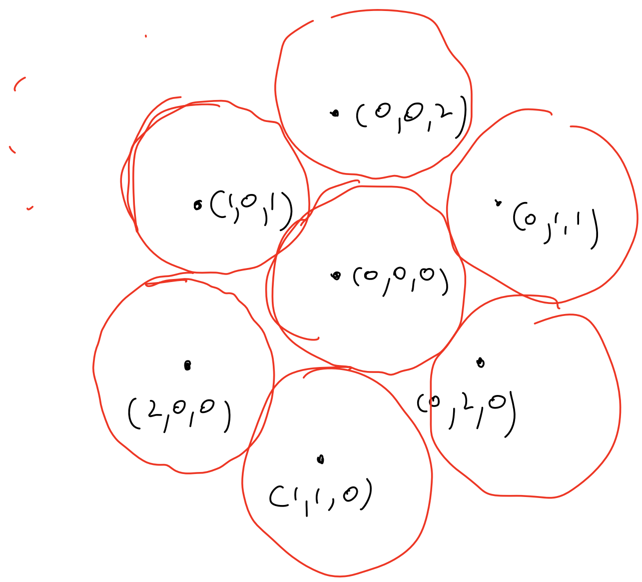
Quale è la densità massimale Δ_n degli impacchettamenti di sfere in $\mathbb{R}^n$? (Cioè l'estremo superiore delle densità di impacchettamenti di sfere in $\mathbb{R}^n$?)

OSS 3 L'estremo superiore è ~~realizzato~~ da impacchettamenti (Groemer).

2. Dim = 3

Teorema (Hales 1998) – Congettura di Keplero.

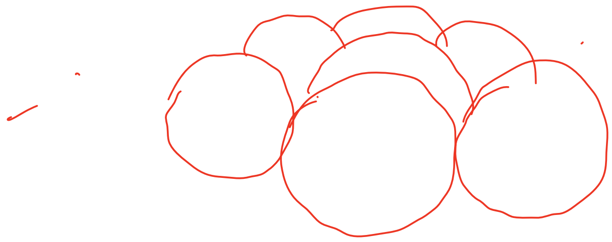
La densità massima di un impacchettamento di sfere in $\mathbb{R}^3$ è quella di $D_3 (= A_3)$, data da:



Le sfere hanno raggio 1 e centri tutti gli $x \in \mathbb{Z}^3$ tali che

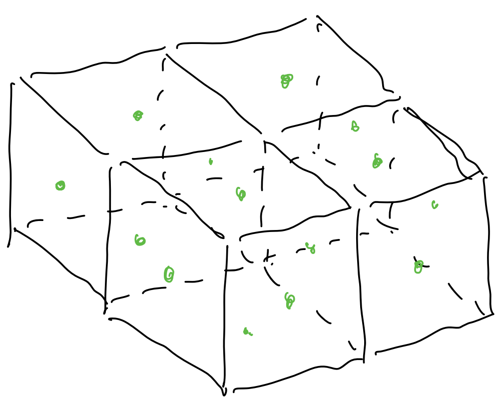
$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \quad (2)$$

Secondo modo di costruire $D_3 (= A_3)$. Disponete le sfere come i dischi di A_2:



e poi sovrapporete (e sottoporete) copie di A_2 (seguendo una certa regola...).

Terzo modo di costruire $D_3 (= A_3)$.



I centri delle sfere, denotati con $\circ$, sono i centri delle facce dei cubi (ripetuti all'infinito, in tutte le direzioni).

La densità di D_3, cioè la densità massimale in $\mathbb{R}^3$, è

$$\Delta_3 = \frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0,7405\ldots$$

3. Dim > 3

Perchè studiare il caso dim > 3?

1ª Risposta: per curiosità, e perchè così facendo si scoprono strutture matematiche interessanti.

2ª Risposta: Trasmissione di dati con "rumore".

In generale:

$$2^{-n} \leq \Delta_n \leq 2^{-(0,599\ldots + o(1))\cdot n} \qquad (\ast)$$

Per molti n esistono impacchettamenti "record", e le loro densità seguono più o meno l'andamento

in (✱), ma in modo irregolare.
Oltre a Δ_2, Δ_3 (e il caso banale $\Delta_1 = 1$), si conoscono solo Δ_8 e Δ_{24} (di cui parleremo).

4. Reticoli

DEF 3 Un <u>reticolo in $\mathbb{R}^n$</u> è un sottoinsieme $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ per cui esiste una base $\{v_1, \dots, v_n\}$ t.c.

$$\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \;\middle|\; (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \right\}.$$

Esempio 2 • $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ è un reticolo.

• Il reticolo A_2 (in $\mathbb{R}^2$) dato da

$$\Lambda := \left\{ a(2,0) + b(-1, \sqrt{3}) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

• Il reticolo $D_3 = A_3$ (in $\mathbb{R}^3$) dato da

$$\Lambda := \left\{ x \in \mathbb{Z}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 \equiv 0 \ (2) \right\} =$$
$$= \left\{ a_1(1,-1,0) + a_2(0,1,-1) + a_3(0,1,1) \;\middle|\; (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{Z}^3 \right\}.$$

Se $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ è un reticolo, definiamo un impacchettamento di sfere: sia

$$r(\Lambda) := \min \{ \|a\| \mid a \in \Lambda \setminus \{0\} \}.$$

Allora

$$P := \bigcup_{a \in \Lambda} D^n_{r/2}(a)$$

è l'<u>impacchettamento di sfere associato a Λ.</u>

<u>OSS 4</u>

Le densità massimali in $\dim = 2$ e $\dim = 3$ sono realizzate dagli impacchettamenti associati ai reticoli A_2 e $D_3 (= A_3)$.

In dimensione arbitraria n non c'è motivo per aspettarsi che la densità massimale (cioè Δ_n) sia realizzata dall'impacchettamento associato a un reticolo.

OSS 5 In dim = 2 è facile dimostrare che il reticolo che dà la densità maggiore (tra i reticoli) è A_2. Altra cosa è dimostrare che non esistono impacchettamenti (non associati a reticoli) di densità maggiore.

Analogo discorso per $n=3$. È noto da 2 secoli che D_3 $(=A_3)$ dà la densità maggiore (tra i reticoli), ma è stato dimostrato solo 20 anni fa che non esistono impacchettamenti (non associati a reticoli) di densità maggiore.

La densità dell'impacchettamento P associato al reticolo $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ è

$$\Delta(\Lambda) = \limsup_{R \to +\infty} \frac{\mathrm{Vol}\left(P \cap D^n_R(0,0)\right)}{\mathrm{Vol}\, D^n_R(0,0)} =$$

$$= \limsup_{R\to+\infty} \frac{|\Lambda \cap D^n_R(0,0)| \cdot \mathrm{Vol}\, D^n_{r(\Lambda)/2}(0,0)}{\mathrm{Vol}\, D^n_R(0,0)} =$$

$$= \limsup_{R\to+\infty} \frac{|\Lambda \cap D^n_R(0,0)| \cdot \mathrm{Vol}\, D^n_{r(\Lambda)/2}(0,0)}{|\Lambda \cap D^n_R(0,0)| \cdot \mathrm{vol}(C_\Lambda)}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2} \cdot r(\Lambda)^n}{2^n \cdot (n/2)!\, \mathrm{vol}(C_\Lambda)} & n \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{\pi^{(n-1)/2} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!\, r(\Lambda)^n}{n!\, \mathrm{vol}(C_\Lambda)} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

dove $C_\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ è una cella fondamentale di Λ, cioè

$$C_\Lambda = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i v_i \;\middle|\; 0 \leq x_i \leq 1 \ \forall i \right\}$$

dove $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una $\mathbb{Z}$-base di Λ.

(si vede facilmente che se C'_Λ è un'altra

cella fondamentale di Λ, allora
$\mathrm{vol}(C_\Lambda) = \mathrm{vol}(C'_\Lambda)$. Per ricavare la formula va "ricordato" che

$$\mathrm{vol}\, D_1^n(\underline{0}) = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!} & n \text{ pari} \\[2ex] \dfrac{\pi^{(n-1)/2} \cdot 2^n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!} & n \text{ dispari} \end{cases}$$

<u>OSS 6</u> Dalla formula segue che, a parità di volume (cioè di $\mathrm{vol}(C_\Lambda)$), il reticolo Λ di densità maggiore è quello che massimizza $r(\Lambda)$ (cioè la minima distanza tra punti distinti del reticolo).

5. Dim = 8 e Dim = 24

La densità massimale Δ_n di un impacchettamento di sfere in $\mathbb{R}^n$ è nota per

<u>$n=1$</u> Banale: $\Delta_1 = 1$.

<u>$n=2$</u> Thue (~ 1900): $\Delta_2 = \dfrac{\pi}{\sqrt{12}} = 0{,}9068\ldots$

<u>$n=3$</u> Hales (~ 2000): $\Delta_3 = \dfrac{\pi}{\sqrt{18}} = 0{,}7405\ldots$

<u>$n=8$</u> Viazovska (~ 2016): $\Delta_8 = \dfrac{\pi^4}{384} = 0{,}2536\ldots$

<u>$n=24$</u> Cohn, Kumar, Miller, Radchenko, Viazovska (~ 2016): $\Delta_{24} = \dfrac{\pi^{12}}{12!} = 0{,}001929\ldots$

Sia Δ_8 che Δ_{24} sono le densità di reticoli conosciuti da lungo tempo, di nome E_8 e Λ_{24} (o <u>reticolo di Leech</u>) rispettivamente.

Li descriviamo.

Il reticolo E_8

Iniziamo dal reticolo D_8 in $\mathbb{R}^8$, cioè

$$\Omega := \{ x \in \mathbb{Z}^8 \mid x_1 + \dots + x_8 \equiv 0 \ (2) \},$$

e poniamo

$$\Lambda := \{ x + a(\tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2}) \mid x \in \Omega, \ a \in \mathbb{Z} \}.$$

Reticolo E_8.

Per calcolare la densità di E_8 dobbiamo conoscere $r(\Lambda)$ e $vol(C_\Lambda)$.

Facciamo vedere che

$$r(\Lambda) = \sqrt{2}. \qquad (*)$$

Poniamo

$$y_0 := (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \dots, \tfrac{1}{2})$$

se $v \in \Lambda$, allora $v = x + a y_0$ dove $x \in \Omega$ e $a \in \mathbb{Z}$, quindi

$$\|v\|^2 = \|x\|^2 + a \langle x, 2y_0 \rangle + a^2 y_0^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{8} x_i^2 + a \cdot \sum_{i=1}^{8} x_i + 2a^2 \equiv 0 \ (2) \qquad (+)$$

(Notate che $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \equiv \sum_{i=1}^{8} x_i \ (2)$, e quindi $\sum_{i=1}^{8} x_i^2 \equiv 0 \ (2)$ perchè $x \in \Omega$.) Da (+) segue che se $v \in \Lambda$ è non nullo, allora

$$\|v\| \geq \sqrt{2}.$$

Questo dimostra che vale (*).

Ora facciamo vedere che

$$\mathrm{Vol}(C_\Lambda) = 1. \qquad (**)$$

Infatti

$$\mathrm{vol}(C_\Omega) = 2$$

perchè

$$[\mathbb{Z}^n : \Omega] = 2,$$

e siccome

$$[\Lambda : \Omega] = 2$$

abbiamo che

$$\mathrm{vol}(C_\Lambda) = 1.$$

Dalle formule in $(*)$ e $(**)$, ricaviamo (vedi pp. 13 e 14) che

$$\Delta(E_8) = \frac{\pi^4 \cdot 2^4}{2^8 \cdot 4!} = \frac{\pi^4}{384} = 0{,}2536\ldots$$

Il reticolo di Leech

Iniziamo notando che se F è una forma bilineare simmetrica su $\mathbb{Z}^n$ (a valori in $\mathbb{R}$)

$$\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \xrightarrow{F} \mathbb{R},$$

cioè per $v_1, v_2, w \in \mathbb{Z}^n$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{Z}$ si ha

$$F(a_1 v_1 + a_2 v_2, w) = a_1 F(v_1, w) + a_2 F(v_2, w)$$

e

$$F(v,w) = F(w,v) \qquad \forall v, w \in \mathbb{Z}^n$$

che è definita positiva, cioè data una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di $\mathbb{Z}^n$, la matrice simmetrica

$$M_{\mathcal{B}}(F) = (F(v_i, v_j)) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$$

è definita positiva, allora esiste (più di) una immersione

$$\mathbb{Z}^n \overset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n$$

tale che

$$F(v,w) = \langle \varphi(v), \varphi(w) \rangle \qquad \forall v,w \in \mathbb{Z}^n.$$

Quindi per definire un reticolo in $\mathbb{R}^{24}$ ci basta definire una forma bilineare simmetrica definita positiva su $\mathbb{Z}^{24}$.

Partiamo dalla forma bilineare simmetrica $\tilde{G}$ su $\mathbb{R}^{26}$ con forma quadratica associata G data da

$$G(x_0, \ldots, x_{24}, y) := \sum_{i=0}^{24} x_i^2 - y^2$$

Sia $L \subset \mathbb{R}^{26}$ il sottogruppo degli elementi

$(\underbrace{x_0, \ldots, x_{24}}_{x}, y)$ tali che

(A) $x \in \mathbb{Z}^{25}$ e $y \in \mathbb{Z}$, oppure

(B) $x_i \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ $\forall i \in \{0, \dots, 24\}$ e $y \in \mathbb{Z}+\frac{1}{2}$

$\underline{\underline{e}}$

$$x_0 + \dots + x_{24} - y \equiv 0 \qquad (2)$$

(Notate che $(x_0 + \dots + x_{24} - y)$ è intero anche se vale (B).)

Il sottogruppo (abeliano libero) L è di rango 26, e

$$\tilde{G}(v, w) \in \mathbb{Z} \qquad \forall v, w \in L.$$

Sia

$$w := (0, 1, 2, 3, \dots, 24, 70) \in L.$$

Allora

$$G(w) = 0.$$

(Per verificarlo, "ricordate" che

$$1^2 + \dots + m^2 = \frac{1}{6} m \cdot (m+1)(2m+1) \qquad \forall m \in \mathbb{N}.)$$

Allora

$$W^{\perp}/\mathbb{Z}w \cong \mathbb{Z}^{24}$$

e siccome $G(w)=0$, possiamo definire

$$W^{\perp}/\mathbb{Z}w \times W^{\perp}/\mathbb{Z}w \xrightarrow{F} \mathbb{R}$$

ponendo

$$F([a],[b]) := \tilde{G}_T(a,b).$$

Questo è il <u>reticolo di Leech Λ_{24}.</u>

Si verifica che

$$r(\Lambda_{24}) = 2 \qquad \mathrm{vol}(C_{\Lambda_{24}}) = 1.$$

Da questo segue che

$$\Delta(\Lambda_{24}) = \frac{\pi^{12}}{12!} = 0{,}001929\ldots$$