Capitolo 5

Determinanti

Il determinante di una matrice quadrata $n \times n$ è una funzione polinomiale omogenea di grado n nelle entrate della matrice che gode di notevoli proprietà. In particolare per una matrice con entrate in un campo il determinante è non nullo se e solo se la matrice è invertibile. Se il campo è quello dei reali possiamo interpretare il determinante come un'area o volume (con segno).

5.1 La definizione

Sia R un anello (commutativo con unità). Sia $A \in M_{n,n}(R)$. Sia A^i_j la matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta eliminando riga i-esima e colonna j-esima di A. Definiamo la funzione

$$\mathrm{Det}_n \colon M_{n,n}(R) \longrightarrow R$$

ricorsivamente come segue:

(1) $\mathrm{Det}_1((a)) = a$.

(2) Per $n > 1$ definiamo Det_n a partire da Det_{n-1} per mezzo della formula

$$\mathrm{Det}_n(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} a_{nj}\, \mathrm{Det}_{n-1}(A^n_j). \tag{5.1.1}$$

Spieghiamo il punto (2). Assumendo di aver definito Det_{n-1}, la funzione Det_n è data da (5.1.7); siccome Det_1 è data da (1) segue che Det_2 è bene definita e quindi anche Det_3 etc. Diamo alcuni esempi. Se $n = 2$ abbiamo

$$\mathrm{Det}_2 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5.1.2}$$

cioè la formula della Definizione 2.5.6. Per $n = 3$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}_3 \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= \\ &= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Il *determinante* di $A \in M_{n,n}(R)$ è $\mathrm{Det}_n(A)$. Se non c'è pericolo di ambiguità scriviamo Det invece di Det_n. Si usa anche la notazione $|A|$ per $\mathrm{Det}\, A$ - in questo caso si omette di scrivere le parentesi che delimitano la matrice. Per esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \mathrm{Det} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = -2. \tag{5.1.4}$$

La definizione iterativa del determinante si presta a dimostrazioni per induzione. Diamo alcuni esempi.

Esempio 5.1.1. Se $A \in M_{n,n}(R)$ ha una colonna nulla, allora $\mathrm{Det}(A) = 0$. L'affermazione è evidentemente vera se $n = 1$. Sia $n \geqslant 2$, e assumiamo che l'affermazione sia vera per matrici $(n-1) \times (n-1)$. Sia $A \in M_{n,n}(R)$ con $A_{j_0} = 0$. Per definizione abbiamo

$$\mathrm{Det}(A) := (-1)^{n+j_0} a_{nj_0} \mathrm{Det}_{n-1}(A^n_{j_0}) + \sum_{j \neq j_0} (-1)^{n+j} a_{nj} \mathrm{Det}_{n-1}(A^n_j). \tag{5.1.5}$$

Il primo addendo è nullo perchè $a_{nj_0} = 0$, e i rimanenti addendi sono nulli per ipotesi induttiva, perchè ciascuna delle matrici A^n_j ha una colonna nulla (quella di indice $(j_0 - 1)$ se $j < j_0$, e di indice j_0 se $j_0 < j$).

Esempio 5.1.2. Se $B \in M_{n,n}(R)$ una matrice a scala per colonne, cioè

$$B := \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ * & \dots & \dots & 0 & 0 \\ b_{i1} & \dots & b_{ii} & \dots & \dots \\ * & 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{n1} & * & \dots & * & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Allora

$$\mathrm{Det}(B) = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{nn}, \tag{5.1.6}$$

cioè $\mathrm{Det}(B)$ è il prodotto delle entrate sulla diagonale principale. L'affermazione è evidentemente vera se $n = 1$. Sia $n \geqslant 2$, e assumiamo che l'affermazione sia vera per matrici $(n-1) \times (n-1)$. Sia $B \in M_{n,n}(R)$ a scala per colonne. Per definizione abbiamo

$$\mathrm{Det}(B) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} b_{nj} \mathrm{Det}_{n-1}(B^n_j). \tag{5.1.7}$$

Se $j < n$ la matrice B^n_j ha l'ultima colonna nulla, e quindi il suo determinante è nullo per l'Esempio 5.1.1. D'altra parte la matrice B^n_n è a scala per colonne, con entrate $b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{n-1,n-1}$ sulla diagonale principale, e perciò $\mathrm{Det}(B^n_n) = b_{11} \cdot b_{22} \cdot \ldots \cdot b_{n-1,n-1}$ per ipotesi induttiva. Segue che vale l'uguaglianza in (5.1.6).

5.2 Proprietà algebriche del determinante

Studieremo il determinante di matrici con entrate in un campo $\mathbb{K}$. Per capire la funzione determinante Det_n la vedremo come funzione delle n colonne di una matrice $n \times n$, cioè la vedremo come applicazione

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\mathbb{K}^n \times \ldots \times \mathbb{K}^n}_{n} & \xrightarrow{\mathrm{Det}_n} & \mathbb{K} \\ (A_1, \ldots, A_n) & \mapsto & \mathrm{Det}([A_1, \ldots, A_n]) \end{array} \tag{5.2.1}$$

Proposizione 5.2.1. *La funzione* Det_n *è lineare in ciascuna colonna, cioè fissate colonne*

$$A_1, \ldots, A_{j_0-1}, A_{j_0+1}, \ldots, A_n, \tag{5.2.2}$$

l'applicazione $\phi \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *definita da*

$$\phi(D) := \mathrm{Det}([A_1, \ldots, A_{j_0-1}, D, A_{j_0+1}, A_n]) \tag{5.2.3}$$

è lineare.

Dimostrazione. Per induzione su n. Il caso $n = 1$ è banalmente vero. Dimostriamo il passo induttivo. Per $j \neq j_0$ sia $X_j \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ la colonna ottenuta eliminando l'ultima entrata di A_j, e sia $\overline{D} \in$

$M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ la colonna ottenuta eliminando l'ultima entrata di D. Si ha che

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}_n&(A_1,\ldots,A_{j_0-1},D,A_{j_0+1},\ldots,A_n)=\\ &=\sum_{j\neq j_0}(-1)^{n+j}a_{nj}\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j-1},\widehat{X_j},X_{j+1},\ldots,X_{j_0-1},\overline{D},X_{j_0+1},\ldots,X_n)+\\ &\qquad+(-1)^{n+j_0}d_n\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0-1},X_{j_0+1},\ldots,X_n).\end{aligned}\tag{5.2.4}$$

Qui la notazione $\widehat{X_j}$ sta per "manca la colonna X_j", e d_n è l'ultima entrata di D.

Per l'ipotesi induttiva l'applicazione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ che manda D in

$$(-1)^{n+j}a_{nj}\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j-1},\widehat{X_j},X_{j+1},\ldots,X_{j_0-1},\overline{D},X_{j_0+1},\ldots,X_n)\tag{5.2.5}$$

è lineare, e l'applicazione $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ che manda D in $(-1)^{n+j_0}d_n\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0-1},X_{j_0+1},\ldots,X_n)$ è visibilmente lineare. Quindi l'uguaglianza in (5.2.4) mostra che ϕ è somma di n applicazioni lineari da $\mathbb{K}^n$ a $\mathbb{K}$, e quindi è lineare. □

Proposizione 5.2.2. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Se esistono $1 \leqslant j_0 < j_1 \leqslant n$ tali che $A_{j_0} = A_{j_1}$, allora* $\operatorname{Det}(A) = 0$.

Dimostrazione. La dimostrazione è per induzione su n. Il caso $n = 1$ è banalmente vero, non c'è nulla da dimostrare. Dimostriamo il passo induttivo. Quindi supponiamo che se una matrice $(n-1)\times(n-1)$ ha due colonne uguali, allora ha determinante nullo.

Iniziamo dimostrando che, se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e per un certo $j_0 \in \{1,\ldots,n-1\}$ si ha $A_{j_0} = A_{j_0+1}$, allora $\operatorname{Det}(A) = 0$. Per $1 \leqslant j \leqslant n$ sia $X_j \in M_{n-1,1}(\mathbb{K})$ la colonna ottenuta eliminando l'ultima entrata di A_j. Si ha che

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}_n&(A_1,\ldots,A_n)=\\ &=\sum_{j_0\neq j\neq j_0+1}(-1)^{n+j}a_{nj}\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j-1},\widehat{X_j},X_{j+1},\ldots,X_n)+\\ &\quad+(-1)^{n+j_0}a_{n,j_0}\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0-1},\widehat{X_{j_0}},X_{j_0+1},\ldots,X_n)+\\ &\qquad+(-1)^{n+j_0+1}a_{n,j_0+1}\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0},\widehat{X_{j_0+1}},X_{j_0+2},\ldots,X_n).\end{aligned}\tag{5.2.6}$$

Siccome $X_{j_0} = X_{j_0+1}$, per ipotesi induttiva

$$\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j-1},\widehat{X_j},X_{j+1},\ldots,X_n)=0\tag{5.2.7}$$

per $j \notin \{j_0, j_0+1\}$. Quindi

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}_n&(A_1,\ldots,A_n)=\\ &=(-1)^{n+j_0}a_{n,j_0}\left(\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0-1},\widehat{X_{j_0}},X_{j_0+1},\ldots,X_n)-\operatorname{Det}_{n-1}(X_1,\ldots,X_{j_0},\widehat{X_{j_0+1}},X_{j_0+2},\ldots,X_n)\right).\end{aligned}$$

Siccome le n-ple $(X_1,\ldots,X_{j_0-1},\widehat{X_{j_0}},X_{j_0+1},\ldots,X_n)$ e $(X_1,\ldots,X_{j_0},\widehat{X_{j_0+1}},X_{j_0+2},\ldots,X_n)$ sono le stesse, segue che $\operatorname{Det}(A) = 0$.

Prima di finire la dimostrazione facciamo vedere che se scambiamo due colonne adiacenti di una matrice quadrata, il suo determinante cambia segno. Più formalmente, se $1 \leqslant j_0 < n$, allora

$$\operatorname{Det}(A_1,\ldots,A_{j_0-1},A_{j_0+1},A_{j_0},A_{j_0+2},\ldots,A_n)=-\operatorname{Det}(A).\tag{5.2.8}$$

Per quello che abbiamo appena dimostrato

$$\operatorname{Det}(A_1,\ldots,A_{j_0-1},A_{j_0}+A_{j_0+1},A_{j_0}+A_{j_0+1},A_{j_0+2},\ldots,A_n)=0.$$

D'altra parte, siccome il determinante è lineare in ciascuna colonna il determinante a sinistra dell'uguaglianza che appare sopra è la somma di quattro determinanti in cui le colonne di indici diversi da j_0 e j_0+1 sono le corrispondenti colonne di A, e quelle ai posti j_0 e j_0+1 sono (A_{j_0}, A_{j_0}), (A_{j_0}, A_{j_0+1}), (A_{j_0+1}, A_{j_0}) e (A_{j_0+1}, A_{j_0+1}). Il primo e l'ultimo determinante sono nulli per quello che abbiamo appena dimostrato, e quindi otteniamo che

$$\operatorname{Det}(A_1, \ldots, A_{j_0-1}, A_{j_0}, A_{j_0+1}, A_{j_0+2}, \ldots, A_n) + \operatorname{Det}(A_1, \ldots, A_{j_0-1}, A_{j_0+1}, A_{j_0}, A_{j_0+2}, \ldots, A_n) = 0.$$

Questo dimostra che vale l'uguaglianza in (5.2.8).

Ora dimostriamo che, se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e $A_{j_0} = A_{j_1}$ per $1 \leqslant j_0 < j_1 \leqslant n$, allora $\operatorname{Det}(A) = 0$. Poniamo $k := j_1 - j_0$. Abbiamo appena dimostrato che l'affermazione è vera se $k = 1$. Assumiamo che sia vera per $k = p$, e dimostriamo che è vera per $k = p+1$. È chiaro che questo finirà la dimostrazione. Per l'uguaglianza in (5.2.8) abbiamo che

$$\operatorname{Det}(A) = -\operatorname{Det}(A_1, \ldots, A_{j_1-2}, A_{j_1}, A_{j_1-1}, A_{j_0+1}, \ldots, A_n).$$

La matrice con colonne $A_1, \ldots, A_{j_1-2}, A_{j_1}, A_{j_1-1}, A_{j_0+1}, \ldots, A_n$ ha le colonne ai posti j_0 e $j_1 - 1$ uguali, e siccome $(j_1 - 1) - j_0 = p$, segue che il suo determinante è nullo. Per l'uguaglianza sopra segue che $\operatorname{Det}(A) = 0$. □

Corollario 5.2.3. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Il determinante della matrice ottenuta scambiando due colonne di A di indici diversi è uguale a $-\operatorname{Det}(A)$.*

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 5.2.2 ragionando come nella dimostrazione dell'uguaglianza in (5.2.8). □

Corollario 5.2.4. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Il determinante della matrice ottenuta aggiungendo a una colonna di A un multiplo di una colonna di indici diverso è uguale a* $\operatorname{Det}(A)$.

Dimostrazione. Siano $j_0, j_1 \in \{1, \ldots, n\}$ diversi. Siccome il determinate è lineare nelle colonne, abbiamo

$$\operatorname{Det}(A_1, \ldots, A_{j_0} + \lambda A_{j_1}, A_{j_0+1}, \ldots, A_n) = \operatorname{Det}(A) + \lambda \operatorname{Det}(A_1, \ldots, A_{j_0-1}, A_{j_1}, A_{j_0+1}, \ldots, A_n)$$

L'ultimo determinante che appare nell'equazione sopra è nullo perchè è il determinante di una matrice le cui colonne di indici j_0 e j_1 sono uguali. □

Osservazione 5.2.5. I corollari 5.2.3 e 5.2.4 ci dicono che la matrice ottenuta da A con una operazione elementare di tipo (1) sulle colonne ha determinante uguale a $-\operatorname{Det}(A)$, e che la matrice ottenuta da A con una operazione elementare di tipo (2) sulle colonne ha determinante uguale a $\operatorname{Det}(A)$. Tenendo conto dell'Esempio
refexpl:detscala otteniamo il seguente algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Con una serie di operazioni elementari tipo (1) e (2) sulle colonne passiamo da A a una matrice a scala per colonne B. Se s è il numero di scambi di colonne, allora

$$\operatorname{Det}(A) = (-1)^s b_{1,1} \cdot \ldots \cdot b_{n,n}. \tag{5.2.9}$$

Proposizione 5.2.6. *Una matrice quadrata A è singolare se e solo se* $\operatorname{Det}(A) = 0$.

Dimostrazione. Con una serie di operazioni elementari tipo (1) e (2) sulle colonne passiamo da A a una matrice a scala per colonne B. Il rango di A è uguale al rango di B e, per l'Osservazione 5.2.5 $\operatorname{Det}(A) = 0$ se e solo se $\operatorname{Det}(B) = 0$. Supponiamo che A sia singolare. Allora B è singolare, cioè la sua ultima colonna è nulla, e perciò $b_{n,n} = 0$. Per l'Osservazione 5.2.5 $\operatorname{Det}(B) = 0$, e quindi $\operatorname{Det}(A) = 0$.

Ora supponiamo che $\operatorname{Det}(A) = 0$. Per l'Osservazione 5.2.5 segue che esiste $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $b_{i,i} = 0$. Siccome B è a scala per colonne segue che $b_{n,n} = 0$, e perciò l'ultima colonna di B è nulla. Quindi B ha rango minore di n, e perciò anche A, cioè A è singolare. □

5.3 Determinanti e rango di una matrice

Per la Proposizione 5.2.6 una matrice quadrata $n \times n$ ha rango massimo, cioè n, se e solo se il suo determinante è non nullo. Più generalmente il rango di una matrice è determinato dai determinanti delle sue sottomatrici.

Definizione 5.3.1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e siano $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m$, $1 \leqslant j_1 < i_2 < \ldots < j_q \leqslant n$. La *sottomatrice di A* corrispondente alle righe $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant m$ e alle colonne $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_q \leqslant n$ è la matrice $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ con entrata a_{i_p,j_q} su riga p e colonna q. Una sottomatrice C di A *contiene la sottomatrice B* se corrisponde a insiemi di righe e colonne che contengono rispettivamente $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ e $\{j_1, i_2, \ldots, j_q\}$.

Teorema 5.3.2 (degli orlati)**.** *Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha rango r se e solo se esiste una sua sottomatrice B di dimensione $r \times r$ con le seguenti proprietà: il determinante di B è non nullo, e ogni sottomatrice di A di dimensione $(r+1) \times (r+1)$ contenente B ha determinante nullo.*

Mostriamo come può essere usato il Teorema degli orlati per calcolare il rango di una matrice, poi passeremo alla dimostrazione.

Esempio 5.3.3. Calcoliamo il rango di $A \in M_{3,4}(\mathbb{Q})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

La sottomatrice delle entrate su righe $2, 3$ e colonne $1, 2$ è

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

e ha determinante non nullo. Esistono due sottomatrici 3×3 contenenti B, sono

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Siccome entrambe hanno determinante nullo segue che A ha rango 2.

Prima di dimostrare il Teorema 5.3.2, diamo un risultato intermedio.

Proposizione 5.3.4. *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia B la sua sottomatrice $r \times r$ corrispondente alle righe $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_r \leqslant m$ e alle colonne $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_r \leqslant n$. Se il determinante di B è non nullo, allora le colonne di A di indici $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ sono linearmente indipendenti, e analogamente le righe di A di indici $i_1 < i_2 < \ldots < i_r$ sono linearmente indipendenti. In particolare il rango di A è almeno r.*

Dimostrazione. Supponiamo che

$$\lambda_1 A_{j_1} + \lambda_2 A_{j_2} + \ldots + \lambda_r A_{j_r} = 0.$$

Questo implica che

$$\lambda_1 B_{j_1} + \lambda_2 B_{j_2} + \ldots + \lambda_r B_{s_r} = 0.$$

Siccome B è una matrice quadrata con determinante non nullo le sue colonne sono linearmente indipendenti, e quindi $\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0$. Questo dimostra che $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$ sono linearmente indipendenti. Analogamente si dimostra che $A^{i_1}, A^{i_2}, \ldots, A^{i_r}$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Dimostrazione del Teorema 5.3.2. Supponiamo che A abbia rango r. Allora esistono colonne di A di indici $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$ che sono linearmente indipendenti, e tali che ogni colonna di A di indice diverso da $j_1, j_2 < \ldots, j_r$ sia combinazione lineare di $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$. Sia M la matrice $m \times r$ formata dalle colonne $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$. Siccome il rango della trasposta M^t è uguale al rango di M, cioè r, esistono r righe di M, con indici $i_1, i_2 \ldots, i_r$, che sono linearmente indipendenti. Sia B la matrice $r \times r$ che ha come righe le r righe di M di indici $i_1, i_2 \ldots, i_r$. Allora B ha determinante non nullo. Quindi esiste una sottomatrice $r \times r$ di A con determinante non nullo. D'altra parte se esistesse una sottomatrice $(r+1) \times (r+1)$ di A con determinante non nullo, allora il rango di A sarebbe almeno $r+1$ per la Proposizione 5.3.4, contraddizione.

Ora dimostriamo il viceversa, cioè che se esiste una sottomatrice B di A con le proprietà enunciate, allora il rango di A è r. Per il ragionamento appena fatto il rango di A è almeno r. Per finire la dimostrazione basta dimostrare che ogni colonna di A_j di indice diverso da $j_1, j_2, \ldots, j_r$ è combinazione lineare delle colonne $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}$, e siccome queste colonne sono linearmente indipendenti ciò equivale a dimostrare che la matrice M con colonne $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_r}, A_j$ ha rango minore di $r+1$. Le righe di M con indici $i_1, i_2 \ldots, i_r$ sono linearmente indipendenti perchè $\operatorname{Det} B \neq 0$, e quindi basta dimostrare che ogni altra riga di M è una combinazione lineare di queste righe, ovvero che ogni sottomatrice $(r+1) \times (r+1)$ di M che contiene le righe con indici $i_1, i_2 \ldots, i_r$ ha determinante nullo. Ma questo vale per ipotesi. □

Una conseguenza immediata del Teorema 5.3.2 è la seguente.

Corollario 5.3.5. *Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ha rango r se e solo se esiste una sua sottomatrice $r \times r$ di determinante non nullo e ogni sua sottomatrice $(r+1) \times (r+1)$ ha determinante nullo.*

5.4 Applicazioni multilineari

Per capire più a fondo le proprietà del determinante conviene introdurre le applicazioni multilineari alternanti. Partiamo dalle le applicazioni multilineari.

Definizione 5.4.1. Siano $V_1, \ldots, V_n$ e W spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e sia Φ un'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \ldots \times V_n & \xrightarrow{\Phi} & W \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \Phi(v_1, \ldots, v_n) \end{array} \tag{5.4.1}$$

(1) La Φ è *lineare nell'entrata j-esima* (dove $1 \leqslant j \leqslant n$) se

$$\begin{aligned} &\Phi(v_1, \ldots, v_{j-1}, \lambda u + \mu w, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \\ &\qquad = \lambda \Phi(v_1, \ldots, v_{j-1}, u, v_{j+1}, \ldots, v_n) + \mu \Phi(v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_n) \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

per $v_1, \ldots, v_{j-1}, u, w, v_{j+1}, \ldots, v_n \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

(2) Φ è *multilineare* se è lineare in ciascun entrata. (Se $n = 2$ diciamo che Φ è *bi*lineare.)

Esempio 5.4.2. Consideriamo le applicazioni $\Psi_i \colon \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ definite da

$$\Psi_1(x, y) := xy^2 + x, \quad \Psi_2(x, y) := 1, \quad \Psi_3(x, y) := 5xy.$$

La Ψ_1 è lineare nella prima entrata ma non nella seconda, la Ψ_2 non è lineare in alcuna entrata, la Ψ_2 è bilineare.

Esempio 5.4.3. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} V \times V^\vee & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (v, f) & \mapsto & f(v) \end{array} \tag{5.4.3}$$

è bilineare.

Esempio 5.4.4. Scelta un'unità di misura, è ben definito il prodotto vettoriale di due vettori geometrici dello spazio euclideo, e quindi abbiamo l'applicazione bilineare

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{V}(\mathbb{E}^3) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^3) & \longrightarrow & \mathsf{V}(\mathbb{E}^3) \\ (v, w) & \mapsto & v \wedge w \end{array} \tag{5.4.4}$$

Ricordiamo che, se $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ è una base ortonormale di $\mathsf{V}(\mathbb{E}^3)$ (ortonormale significa che ogni vettore della base ha lunghezza 1 e che coppie di vettori diversi della base sono ortogonali), allora

$$(a_1\mathbf{i} + b_1\mathbf{j} + c_1\mathbf{k}) \wedge (a_2\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + c_2\mathbf{k}) = (b_1c_2 - c_1b_2)\mathbf{i} - (a_1c_2 - c_1a_2)\mathbf{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\mathbf{k}. \tag{5.4.5}$$

Segue da questa espressione che il prodotto vettoriale è bilineare.

Terminologia 5.4.5. Un'applicazione multilineare $\Phi\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to \mathbb{K}$ si dice *forma multilineare.*

Definizione 5.4.6. Se $V_1, \ldots, V_n$ e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $\mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ è l'insieme delle applicazioni multilineari $\Phi\colon V_1 \times \ldots \times V_n \to W$.

Se $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ definiamo

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \ldots \times V_n & \overset{\Phi_1 + \Phi_2}{\longrightarrow} & W \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \Phi_1(v_1, \ldots, v_n) + \Phi_2(v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

Analogamente, se $\Phi \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo

$$\begin{array}{ccc} V_1 \times \ldots \times V_n & \overset{\lambda\Phi}{\longrightarrow} & W \\ (v_1, \ldots, v_n) & \mapsto & \lambda\Phi(v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

Proposizione 5.4.7. *Siano* $V_1, \ldots, V_n$ *e* W *spazi vettoriali su* $\mathbb{K}$*. Se* $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ *allora* $(\Phi_1 + \Phi_2) \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$*. Se* $\Phi \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ *e* $\lambda \in \mathbb{K}$*, allora* $\lambda\Phi \in \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$*. Con queste operazioni* $\mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, W)$ *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$*.*

Dimostrazione. La somma $(\Phi_1 + \Phi_2)$ è multilineare perchè la somma di applicazioni lineari è lineare, e $\lambda\Phi$ è multilineare perchè il prodotto di uno scalare per un'applicazione lineare è lineare. La facile verifica dell'ultima affermazione è lasciata al lettore. □

Esempio 5.4.8. Siano $V_1, \ldots, V_n$ spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, e siano $\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n \in V$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{MultLin}(V_1 \times \ldots \times V_n, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \Phi & \mapsto & \Phi(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) \end{array}$$

è lineare. Infatti la linearità segue subito dalla definizione di somma di applicazioni multilineari e moltiplicazione di uno scalare per un'applicazione multilineare.

5.5 Applicazioni multilineari alternanti

Da ora in poi ci concentriamo sul caso $V_1 = \ldots = V_n$, cioè consideremo applicazioni $\Phi\colon V^n \to W$, dove V e W sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.

Definizione 5.5.1. Sia $\Phi\colon V^n \to W$.

(1) Siano $1 \leqslant j < h \leqslant n$; Φ è *alternante nelle entrate* j, h se $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ ogni qualvolta $v_j = v_h$.

(2) Φ è *alternante* se è alternante nelle entrate j, h per ogni $1 \leqslant j < h \leqslant n$.

Esempio 5.5.2. Il prodotto vettoriale $\mathsf{V}(\mathbb{E}^3) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^3) \to \mathsf{V}(\mathbb{E}^3)$ (vedi l'Esempio 5.4.4) è alternante (e bilineare).

Esempio 5.5.3. Consideriamo le applicazioni $\Phi_i\colon \mathbb{K}\times\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ definite da

$$\Phi_1(x,y) := 3xy, \quad \Phi_2(x,y) := xy+1, \quad \Phi_3(x,y) := x^3 - xy^2.$$

La Φ_1 è bilineare ma non alternante, la Φ_3 è alternante ma non bilineare, la Φ_2 non è nè bilineare nè alternante.

Esempio 5.5.4. Sia $A\in M_{n,n}(\mathbb{K})$. L'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n\times\mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (X,Y) & \mapsto & X^t\cdot A\cdot Y \end{array} \tag{5.5.1}$$

è bilineare. Siccome

$$\Phi(X,X) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}^{n} a_{ij}x_ix_j,$$

Φ è alternante se solo se $A^t = -A$ e in aggiunta $a_{ii}=0$ per ogni $i\in\{1,\ldots,n\}$. Notate che se $\operatorname{char}\mathbb{K}\neq 2$ l'ultima condizione segue dalla prima.

Proposizione 5.5.5. *Sia $\Phi\colon V^n\to W$. Supponiamo che Φ sia multilineare e alternante.*

1. *Se $v_1,\ldots,v_n\in V$ sono linearmente dipendenti, allora $\Phi(v_1,\ldots,v_n)=0$.*
2. *Siano $1\leqslant j<h\leqslant n$: allora*

$$\Phi(v_1,\ldots,v_{j-1},v_h,v_{j+1},\ldots,v_{h-1},v_j,v_{h+1},\ldots,v_n) = \\ = -\Phi(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_{h-1},v_h,v_{h+1},\ldots,v_n),$$

cioè scambiando due entrate il valore di Φ cambia segno.

Dimostrazione. Dimostriamo che vale (1). Per la Proposizione 2.5.10 esiste $j\in\{1,\ldots,n\}$ tale che

$$v_j = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}^{n} \mu_i v_i.$$

Per la multilinearità di Φ abbiamo che

$$\Phi(v_1,\ldots,v_{j-1},v_j,v_{j+1},\ldots,v_n) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ i\neq j}}^{n} \mu_i\Phi(v_1,\ldots,v_{j-1},v_i,v_{j+1},\ldots,v_n).$$

D'altra parte ogni addendo della sommatoria è nullo perchè Φ è alternante.

Ora dimostriamo che vale (2). Supponiamo che $n=2$ (se $n=1$ non c'è nulla da dimostrare). Siccome Φ è alternante e multilineare abbiamo che

$$0=\Phi(u+w,u+w)=\Phi(u,u)+\Phi(w,w)+\Phi(u,w)+\Phi(w,u)=\Phi(u,w)+\Phi(w,u).$$

Ora supponiamo che $n>2$. Siccome la funzione

$$\begin{array}{ccc} V\times V & \longrightarrow & W \\ (u,w) & \mapsto & \Phi(v_1,\ldots,v_{j-1},u,v_{j+1},\ldots v_{h-1},w,v_{h+1},\ldots,v_n) \end{array} \tag{5.5.2}$$

è chiaramente multilineare alternante, la (2) segue dal caso $n=2$. □

Terminologia 5.5.6. Un'applicazione multilineare e alternante $\Phi\colon V^n\to\mathbb{K}$ si dice *forma multilineare alternante (o antisimmetrica)* .

Per capire le proprietà del determinante studieremo l'insieme di tutte le forme multilineari alternanti $V^n \to \mathbb{K}$ nel caso in cui $\dim V = n$.

Definizione 5.5.7. Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ è l'insieme delle forme multilineari alternanti $\Phi\colon V^n \to \mathbb{K}$.

Chiaramente $\mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ è un sottoinsieme di $\mathrm{MultLin}(V^n, \mathbb{K})$. Un attimo di riflessione mostra che vale il seguente risultato.

Proposizione 5.5.8. $\mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K})$ *è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale (su* $\mathbb{K}$*)* $\mathrm{MultLin}(V^n, \mathbb{K})$.

Il risultato principale di questa sezione è il seguente.

Proposizione 5.5.9. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n, e sia $\mathcal{B} := \{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ una base di V. L'applicazione lineare (vedi l'Esempio 5.4.8)*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alt}(V^n, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}} & \mathbb{K} \\ \Phi & \mapsto & \Phi(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n) \end{array}$$

è un isomorfismo.

Dimostrazione. Iniziamo dimostrando che $\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$ è iniettiva, cioè che il nucleo di $\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$ è banale. Sia $\Phi \in \mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$, e dimostriamo che $\Phi = 0$, cioè che $\Phi(v_1, \ldots, v_n) = 0$ per ogni $v_1, \ldots, v_n \in V$. Siccome $\{\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n\}$ è una base di V, esistono $a_{ij} \in \mathbb{K}$ per $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ tali che

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{v}_j \tag{5.5.3}$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$. Per la multilinearità di Φ abbiamo

$$\Phi(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} a_{1,j_1} a_{2,j_2} \ldots a_{n,j_n} \Phi(\overline{v}_{j_1}, \ldots, \overline{v}_{j_n}) \tag{5.5.4}$$

dove la sommatoria è su tutte le n-ple $(j_1, \ldots, j_n)$. Finiamo la dimostrazione che $\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$ è iniettiva mostrando che

$$\Phi(\overline{v}_{j_1}, \ldots, \overline{v}_{j_n}) = 0 \tag{5.5.5}$$

per ogni n-pla $(j_1, \ldots, j_n)$. Se tra gli indici c'è una ripetizione, allora l'uguaglianza in (5.5.5) vale perchè Φ è alternante. Se non ci sono ripetizioni tra gli indici, allora $j_1, \ldots, j_n$ è una permutazione di $1, 2, \ldots, n$. Sia $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tale che $j_k = 1$. Abbiamo che

$$\Phi(\overline{v}_{j_1}, \ldots, \overline{v}_{j_n}) = \pm\Phi(\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_{j_{k-1}}, \overline{v}_{j_1}, \overline{v}_{j_{k+1}}, \ldots, \overline{v}_{j_n}).$$

Più precisamente, se $k = 1$ i due membri sono uguali, se $k > 1$ uno è l'opposto dell'altro perchè Φ è alternante (per la Proposizione 5.5.5). Iterando questo ragionamento, troviamo che

$$\Phi(\overline{v}_{j_1}, \ldots, \overline{v}_{j_n}) = \pm\Phi(\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n).$$

Siccome il membro di destra è nullo per ipotesi, segue che vale l'uguaglianza in (5.5.5).

Rimane da dimostrare che $\mathrm{ev}_{\mathcal{B}}$ è suriettiva. Siccome l'applicazione $X_{\mathcal{B}}\colon V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$ è un isomorfismo e $X_{\mathcal{B}}(\overline{v}_i) = e_i$ (dove $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ sono i vettori della base standard), è sufficiente dimostrare che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Alt}((\mathbb{K}^n)^n, \mathbb{K}) & \xrightarrow{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}} & \mathbb{K} \\ \Phi & \mapsto & \Phi(e_1, \ldots, e_n) \end{array}$$

non è nulla. Ma questo è chiaro perchè Det_n è multilineare alternante ma non nulla. $\square$

5.6 Binet, Laplace e Cramer

La formula di Binet

Proposizione 5.6.1 (Formula di Binet)**.** *Siano* $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$*. Allora* $\operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B)$*.*

Dimostrazione. Sia $\Phi\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ l'applicazione definita da $\Phi(M) := \operatorname{Det}(A \cdot M)$. Dimostriamo che Φ è multilineare e alternante nelle colonne. Sia $i \in \{1, \ldots, n\}$, siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ e siano $X_i, Y, Z \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ matrici colonna, dove $i \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$. Allora

$$\begin{aligned}\Phi([X_1, \ldots, X_{i-1}, \lambda Y + \mu Z, X_{i+1}, \ldots, X_n]) &= \operatorname{Det}([A{\cdot}X_1, \ldots, A{\cdot}X_{i-1}, A{\cdot}(\lambda Y + \mu Z), A{\cdot}X_{i+1}, \ldots, A{\cdot}X_n]) = \\ = \lambda \operatorname{Det}([A{\cdot}X_1, \ldots, A{\cdot}X_{i-1}, A{\cdot}Y, A{\cdot}X_{i+1}, \ldots, A{\cdot}X_n]) &+ \mu \operatorname{Det}([A{\cdot}X_1, \ldots, A{\cdot}X_{i-1}, A{\cdot}Z, A{\cdot}X_{i+1}, \ldots, A{\cdot}X_n]) = \\ &= \lambda\Phi([X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_n]) + \mu\Phi([X_1, \ldots, X_{i-1}, Z, X_{i+1}, \ldots, X_n]).\end{aligned}$$

(La seconda uguaglianza segue dalla multilinearità della funzione determinante.) Abbiamo dimostrato che Φ è multilineare nelle colonne. Si dimostra che Φ è alternante nelle colonne notando che se le colonne di indici j e k di M sono uguali, allora le colonne di indici j e k di $A \cdot M$ sono uguali.

D'altra parte anche l'applicazione $\Psi\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita da $\Psi(M) := \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(M)$ è multilineare e alternante nelle colonne di M perchè lo è la funzione determinante. Siccome

$$\Phi(1_n) = \operatorname{Det}(A \cdot 1_n) = \operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(1_n) = \Psi(1_n),$$

segue dalla Proposizione 5.5.9 (con $V = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{B}$ la base standard) che $\Phi = \Psi$. □

Corollario 5.6.2. *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *invertibile cioè con* $\operatorname{Det} A \neq 0$ *per l'Osservazione 5.2.5. Allora* $\operatorname{Det}(A^{-1}) = \operatorname{Det}(A)^{-1}$*.*

Dimostrazione. Per la formula di Binet abbiamo che

$$1 = \operatorname{Det}(1_n) = \operatorname{Det}(A \cdot A^{-1}) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(A^{-1}).$$

□

Osservazione 5.6.3. La formula di Binet dà che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \\ A & \mapsto & \operatorname{Det}(A) \end{array}$$

è un omomorfismo di gruppi (ricordiamo che l'operazione in $\mathbb{K}^*$ è la moltiplicazione).

La formula di Binet ha la seguente importante conseguenza.

Corollario 5.6.4. *Sia* V *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *finitamente generato. Sia* $f\colon V \to V$ *un endomorfismo. Siano* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$ *basi di* V*. Allora*

$$\operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) = \operatorname{Det}(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)).$$

Dimostrazione. Le equazioni (3.11.1) e (3.10.2), insieme alla formula di Binet e al Corrollario 5.6.2, danno che

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)) &= \operatorname{Det}\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V)^{-1} \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V)\right) = \\ &= \operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V))^{-1} \cdot \operatorname{Det}(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)) \cdot \operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V)) = \operatorname{Det}(M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)).\end{aligned}$$

□

Definizione 5.6.5. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Il *determinante di* f è

$$\operatorname{Det}(f) := \operatorname{Det}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f))$$

dove $\mathcal{B}$ è un'arbitraria base di V - la definizione ha senso grazie al Corollario 5.6.4.

Proposizione 5.6.6. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Allora* $\operatorname{Det}(f \circ g) = \operatorname{Det}(f) \cdot \operatorname{Det}(g)$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B}$ una base di V. Per l'equazione (3.6.6) e la Formula di Binet abbiamo

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}(f \circ g) = \operatorname{Det}(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f \circ g)) = \operatorname{Det}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)\right) = \\ = \operatorname{Det}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)\right) \cdot \operatorname{Det}\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(g)\right) = \operatorname{Det}(f) \cdot \operatorname{Det}(g).\end{aligned}$$

□

Sviluppo di Laplace

La seguente proposizione dà quello che si chiama lo *sviluppo del determinante secondo la riga i-esima.* Nel caso della riga n-esima si tratta della formula che definisce il determinante, cioè (5.1.7).

Proposizione 5.6.7. *Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e $1 \leqslant i \leqslant n$. Abbiamo che*

$$\operatorname{Det}(A) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A_j^i). \tag{5.6.1}$$

Dimostrazione. Sia $\Phi^i\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ la funzione definita ponendo $\Phi^i(A)$ uguale al membro di destra di (5.6.1). Allora Φ^i è multilineare e alternante nelle colonne. Infatti se $i = n$ l'affermazione segue dalle Proposizioni 5.2.1 e 5.2.2, e argomenti del tutto simili danno la dimostrazione per un i qualsiasi. Inoltre un facile argomento induttivo dà che $\Phi^i(1_n) = 1$. Per la Proposizione 5.5.9 segue che l'applicazione Φ^i è uguale all'applicazione Det_n. □

Proposizione 5.6.8. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora* $\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A^t)$.

Dimostrazione. Sia $\Phi\colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ definita da $\Phi(A) := \operatorname{Det}(A^t)$. Consideriamo la Φ come funzione delle colonne. La Proposizione 5.6.7 dà che Det_n è lineare in ciascuna riga. Siccome le colonne di A sono le righe di A^t segue che Φ è lineare in ciascuna colonna, cioè è multilineare (come funzione delle colonne). Ora dimostriamo che Φ è alterna (come funzione delle colonne). Supponiamo che due colonne di A siano uguali: allora le corrispondenti righe di A^t sono uguali. Quindi le righe di A^t sono linearmente dipendenti e perciò A^t è singolare. Per l'Osservazione 5.2.5 segue che $\operatorname{Det}_n(A^t) = 0$. Questo dimostra che Φ è alternante. D'altra parte $\Phi(1_n) = \operatorname{Det}_n(1_n^t) = \operatorname{Det}_n(1_n) = 1$. Per la Proposizione 5.5.9 segue che l'applicazione Φ è uguale all'applicazione Det_n. □

Osservazione 5.6.9. La Proposizione 5.6.8 dà che il determinante è multilineare e alternante nelle righe (oltre che nelle colonne).

Osservazione 5.6.10. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e supponiamo che $B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ sia ottenuta da A con una serie di operazioni elementari sulle righe di tipo (1) e (2), e che siano stati fatti s scambi di righe. Allora B^t è ottenuta da A^t con una serie di operazioni elementari sulle colonne di tipo (1) e (2), tra cui s scambi di colonne. Per l'Osservazione 5.2.5 e la Proposizione 5.6.8 abbiamo che

$$\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A^t) = (-1)^s \operatorname{Det}(B^t) = (-1)^s \operatorname{Det}(B). \tag{5.6.2}$$

Notiamo anche che se B è a scala per righe allora il suo determinante è uguale al prodotto delle entrate sulla diagonale principale, questo segue (per esempio) dall'espansione di $\operatorname{Det}(B)$ secondo l'ultima riga. Quindi per calcolare $\operatorname{Det}(A)$ possiamo ridurre A a scala per righe o per colonne, a seconda della convenienza.

La formula seguente si chiama lo *sviluppo del determinante secondo la colonna j-esima.*

Corollario 5.6.11. *Siano $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ e $1 \leqslant j \leqslant n$. Abbiamo che*

$$\operatorname{Det}(A) := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \operatorname{Det}(A_j^i). \tag{5.6.3}$$

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.6.8 abbiamo che $\operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(A^t)$. Espandendo $\operatorname{Det}(A^t)$ secondo la riga j (che è uguale alla colonna j-esima di A), vedi (5.6.1), otteniamo (5.6.3). □

Le Formule (5.6.1) e (5.6.3) sono vantaggiose se la matrice di cui vogliamo calcolare il determinante ha molte entrate nulle.

La formula di Cramer

Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Siano $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Il *cofattore* (o complemento algebrico) di A di indici i, j è

$$A_{ij} := (-1)^{i+j} \operatorname{Det}(A_j^i). \tag{5.6.4}$$

La *matrice dei cofattori di A* (anche matrice aggiunta ma questo termine indica anche una matrice del tutto diversa), denotata A^c, è la trasposta della matrice $n \times n$ con entrate A_{ij}, cioè

$$A^c := \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{2,1} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{n,1} \\ A_{1,2} & A_{2,2} & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n-1} \\ A_{1,n} & \dots & \dots & \dots & \dots & A_{n-1,n-1} & A_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Esempio 5.6.12. Sia

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Allora

$$A^c := \begin{bmatrix} -6 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Proposizione 5.6.13 (Formula di Cramer)**.** *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$A \cdot A^c = A^c \cdot A = (\operatorname{Det} A) 1_n. \tag{5.6.5}$$

Se A è invertibile, cioè $\operatorname{Det} A \neq 0$, si ha che $A^{-1} = (\operatorname{Det} A)^{-1} A^c$.

Dimostrazione. Siano $1 \leqslant i, j \leqslant n$. L'entrata al posto i, j di $A \cdot A^c$ è uguale a

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^{j+s} a_{is} \operatorname{Det}(A_s^j). \tag{5.6.6}$$

Sia $i = j$: lo sviluppo di $\operatorname{Det} A$ secondo la riga i-sima dà che l'entrata al posto i, i di $A \cdot A^c$ è uguale a $\operatorname{Det} A$. Ora supponiamo che $i \neq j$: la (5.6.6) è lo sviluppo secondo la riga j-esima della matrice B ottenuta dalla A sostituendo alla riga j-esima la riga i-esima di A stessa. Siccome B ha le righe i-esima e j-esima uguali è singolare e quindi $\operatorname{Det} B = 0$. Questo dimostra che le entrate di $A \cdot A^c$ che non sono sulla diagonale principale sono nulle e finisce di dimostrare (5.6.6). La formula $A^{-1} = (\operatorname{Det} A)^{-1} A^c$ segue dalla (5.6.6) moltiplicando ambo i membri della prima (o della seconda) uguaglianza per $(\operatorname{Det} A)^{-1}$. □

Esempio 5.6.14. Sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice dell'Esempio 5.6.12. Applicando la formula di Cramer otteniamo che

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/6 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

5.7 Determinante e area

Sia $\mathbb{E}^2$ il piano della Geometria euclidea. Introduciamo una unità di misura. Quindi sappiamo misurare l'area di regioni semplici (regioni poligonali, dischi, etc.). Se $\mathbf{T} \subset \mathbb{E}^2$ è una regione di cui sappiamo misurare l'area, denotiamo la sua area con $A(\mathbf{T})$. Dimostreremo che l'area di un parallelogramma è dato da un opportuno determinante. Un parallelogramma è determinato dalla scelta dei suoi vertici, che sono dati da $P_0, P_0 + v, P_0 + w, P_0 + v + w$, dove $P_0 \in \mathbb{E}^2$ e $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$. Esplicitamente tale parallelogramma è dato da

$$\Pi(P_0, v, w) := \{P_0 + sv + tw \mid (s,t) \in [0,1]^2\}. \tag{5.7.1}$$

Notate che se v e w sono linearmente dipendenti allora $\Pi(P_0, v, w)$ è un segmento (o un punto se $v = w = 0$). È conveniente considerarlo un parallelogramma "degenere". Notate che se Q_0 è un altro punto di $\mathbb{E}^2$, allora $\Pi(Q_0, v, w)$ è ottenuto da $\Pi(P_0, v, w)$, aggiungendo $\overrightarrow{P_0Q_0}$ a ciascuno dei suoi punti, cioè traslandolo del vettore $\overrightarrow{P_0Q_0}$. In particolare l'area di $\Pi(P_0, v, w)$ dipende da v, w ma non da P_0.

Proposizione 5.7.1. *Sia $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ una base di $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ tale che $\Pi(P_0, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ abbia area 1. Se $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ sono dati da*

$$v = a_{11}\boldsymbol{i} + a_{21}\boldsymbol{j}, \qquad w = a_{12}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j},$$

allora l'area di $\Pi(P_0, v, w)$ è data dalla formula

$$A(\Pi(P_0, v, w)) = |\operatorname{Det}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}|.$$

Dimostrazione. Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbb{R} \\ (a_{11}\mathbf{i} + a_{21}\mathbf{j}, a_{12}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}) & \mapsto & \operatorname{Det}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

Ora definiamo un'applicazione $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \to \mathbb{R}$ legata all'area. Dati $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ sia

$$\epsilon(v,w) := \begin{cases} +1 & \text{se } \mathcal{C} := \{v,w\} \text{ è una base di } \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \text{ e } \operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})) > 0, \\ -1 & \text{se } \mathcal{C} := \{v,w\} \text{ è una base di } \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \text{ e } \operatorname{Det}(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id})) < 0, \\ 0 & \text{se } v, w \text{ sono linearmente dipendenti.} \end{cases}$$

Sia

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{R} \\ (v,w) & \mapsto & \epsilon(v,w) \cdot A(\Pi(P_0, v, w)) \end{array}$$

Informalmente Φ associa a v, w l'area "con segno" di $\Pi(P_0, v, w)$. Vogliamo dimostrare che $\Psi = \Phi$. Siccome Ψ è bilineare, alternante e ha valore 1 sulla coppia $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, ci basta (per la Proposizione 5.5.9) dimostrare che anche Φ è bilineare, alternante e ha valore 1 sulla coppia $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$. La Φ è alternante perchè $\Pi(P_0, v, v)$ è un segmento e quindi $A(\Pi(P_0, v, v)) = 0$, e $\Phi(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = 1$ per la nostra scelta di base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. La dimostrazione che Φ è bilineare è leggermente più elaborata. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Con semplici considerazioni geometriche vediamo che

$$\Phi(\lambda v, w) = \lambda\Phi(v, w), \qquad \Phi(v, \lambda w) = \lambda\Phi(v, w), \tag{5.7.2}$$

e che

$$\Phi(v, w + \lambda v) = \Phi(v, w) = \Phi(v + \lambda w, w). \tag{5.7.3}$$

(L'uguaglianza in (5.7.3) corrisponde al fatto che parallelogrammi con stessa base e stessa altezza hanno aree uguali.) Ora dimostriamo che per $v, w_1, w_2 \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ si ha

$$\Phi(v, w_1 + w_2) = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, w_2). \tag{5.7.4}$$

Se $v = 0$ tutti i termini in (5.7.4) sono nulli e quindi l'uguaglianza vale. Supponiamo che $v \neq 0$. Se w_1 e w_2 sono multipli di v di nuovo tutti i termini in (5.7.4) sono nulli. Quindi possiamo supporre che $w_1 \neq 0$, e perciò $\{v, w_1\}$ è una base di $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$. Quindi esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $w_2 = \lambda w_1 + \mu v$. Per le uguaglianze in (5.7.2) e in (5.7.3) abbiamo

$$\begin{aligned}\Phi(v, w_1 + w_2) = \Phi(v, w_1 + \lambda w_1 + \mu v) = \Phi(v, (1+\lambda)w_1) = (1+\lambda)\Phi(v, w_1) = \Phi(v, w_1) + \lambda\Phi(v, w_1) = \\ = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, \lambda w_1) = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, \lambda w_1 + \mu v) = \Phi(v, w_1) + \Phi(v, w_2).\end{aligned}$$

Questo dimostra che vale l'uguaglianza in (5.7.4). Quindi Φ è lineare nella seconda entrata. Siccome Φ è alternante segue che è lineare anche nella prima entrata.

□

Osservazione 5.7.2. Sia $g\colon \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \to \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ l'endomorfismo tale che $g(\mathbf{i}) = v$ e $g(\mathbf{j}) = w$. La Proposizione 5.7.1 equivale all'affermazione che vale l'uguaglianza $A(\Pi(P_0, v, w)) = |\operatorname{Det}(g)|$.

Proposizione 5.7.3. *Sia $F\colon \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ un'applicazione affine e sia $f\colon \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \to \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ l'applicazione lineare associata, cioè $f = \mathsf{V}(F)$. Sia $\boldsymbol{T} \subset \mathbb{E}^2$ un parallelogramma. Allora l'area del parallelogramma $F(\boldsymbol{T})$ è uguale all'area di $\boldsymbol{T}$ moltiplicata per $|\operatorname{Det}(f)|$.*

Dimostrazione. Il parallelogramma $\mathbf{T}$ è uguale a $\Pi(P_0, v, w)$ per un opportuno $P_0 \in \mathbb{E}^2$ e opportuni $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$, e quindi $F(\mathbf{T})$ è uguale a $\Pi(F(P_0), f(v), f(w))$. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ una base di $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ tale che $\Pi(P_0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ abbia area 1. Se $g\colon \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \to \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ è l'endomorfismo tale che $g(\mathbf{i}) = v$ e $g(\mathbf{j}) = w$, allora

$$A(\Pi(P_0, v, w)) = |\operatorname{Det}(g)|$$

per la Proposizione 5.7.1 (vedi l'Osservazione 5.7.2). Siccome $f \circ g(\mathbf{i}) = f(v)$ e $f \circ g(\mathbf{j}) = w$, abbiamo anche che

$$A(\Pi(F(P_0), f(v), f(w))) = |\operatorname{Det}(f \circ g)| = |\operatorname{Det}(f)| \cdot |\operatorname{Det}(g)| = |\operatorname{Det}(f)| \cdot A(\Pi(P_0, v, w)).$$

(La seconda uguaglianza vale per il Teorema di Binet.) □

Risultati analoghi alle Proposizioni 5.7.1 e 5.7.3 valgono per il volume di parallelepipedi nello spazio, lasciamo al lettore il compito di darne la formulazione e la dimostrazione.

5.8 Determinante e permutazioni

Diamo la classica formula chiusa (non iterativa) per il determinante. Per semplificare la notazione poniamo

$$\mathbf{n} := \{1, \ldots, n\}.$$

Definizione 5.8.1. Data $\varphi\colon \mathbf{n} \to \mathbf{n}$ sia $M_\varphi \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ la matrice con entrate

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = \varphi(j) \\ 0 & \text{se } j \neq \varphi(i) \end{cases}$$

Equivalentemente M_φ è la matrice la cui colonna j è il vettore $e_{\varphi(j)}$ della base standard.

Ricordiamo che una permutazione di un insieme X è un'applicazione biunivoca $\sigma\colon X \to X$, e che l'insieme delle permutazioni di X provvisto dell'operazione di composizione è un gruppo. L'insieme delle permutazioni di $\mathbf{n}$ (o di un insieme di cardinalità n) è denotato $\mathcal{S}_n$.

Osservazione 5.8.2. La matrice M_φ è non singolare se e solo se φ è biunivoca, cioè è un elemento di $\mathcal{S}_n$. Infatti se φ è biunivoca allora le colonne di M_φ sono i vettori della base standard di $\mathbb{K}^n$ (riordinari), e quindi M_φ ha rango n. D'altra parte, se φ non è biunivoca allora non è iniettiva (perchè dominio e codominio di φ hanno la stessa cardinalità n), e quindi esistono almeno due colonne di M_φ uguali, e perciò il rango di M_φ è minore di n.

Proposizione 5.8.3. *Siano $\mathbb{K}$ un campo e $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$\operatorname{Det} A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{Det}(M_{\sigma^{-1}}) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}. \tag{5.8.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base standard di $\mathbb{K}^n$. La colonna j di A è uguale a $\sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$, e siccome Det è multilineare nelle colonne segue che

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det} A = \operatorname{Det}\left(\sum_{i=1}^n a_{i1} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{in} e_i\right) = \\
= \sum_{\mathbf{n} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{n}} \operatorname{Det}(M_\varphi) a_{\varphi(1),1} a_{\varphi(2),2} \ldots a_{\varphi(n),n} = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{Det}(M_\tau) a_{\tau(1),1} a_{\tau(2),2} \ldots a_{\tau(n),n} = \\
= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \operatorname{Det}(M_\tau) a_{1,\tau^{-1}(1)} a_{2,\tau^{1}(2)} \ldots a_{n,\tau^{-1}(n)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \operatorname{Det}(M_{\sigma^{-1}}) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}.
\end{aligned}$$

(La seconda uguaglianza vale perchè, per l'Osservazione 5.8.2, se φ non è biunivoca allora $\operatorname{Det}(M_\varphi) = 0$.) □

Vogliamo capire come calcolare $\operatorname{Det}(M_\sigma)$ per $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Il primo punto è il seguente risultato.

Proposizione 5.8.4. *Se σ, τ sono applicazioni da $\mathbf{n}$ a $\mathbf{n}$, allora*

$$M_{\sigma \circ \tau} = M_\sigma \cdot M_\tau. \tag{5.8.2}$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base standard di $\mathbb{K}^n$. Siccome la colonna j di M_φ è il vettore $e_{\varphi(j)}$, abbiamo che

$$L_{M_\sigma \cdot M_\tau}(e_j) = L_{M_\sigma}(L_{M_\tau}(e_j)) = L_{M_\sigma}\left(e_{\tau(j)}\right) = e_{\sigma \circ \tau(j)} = L_{M_{\sigma \circ \tau}}(e_j).$$

Quindi $L_{M_\sigma \cdot M_\tau}$ e $L_{M_{\sigma \circ \tau}}$ hanno gli stessi valori sui vettori della base standard e perciò $L_{M_\sigma \cdot M_\tau} = L_{M_{\sigma \circ \tau}}$. Segue che vale (5.8.2). □

Se $\sigma \in \mathcal{S}_n$, allora segue da Binet e dalla Proposizione 5.8.4 che $\operatorname{Det}(M_\sigma) \neq 0$. Infatti

$$\operatorname{Det}(M_\sigma) \cdot \operatorname{Det}(M_{\sigma^{-1}}) = \operatorname{Det}(M_\sigma \cdot M_{\sigma^{-1}}) = \operatorname{Det}(M_{\sigma \circ \sigma^{-1}}) = \operatorname{Det}(M_{\mathrm{Id}_\mathbf{n}}) = 1.$$

Definizione 5.8.5. Poniamo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K}^* \\ \sigma & \mapsto & \operatorname{Det}(M_\sigma) \end{array} \tag{5.8.3}$$

Proposizione 5.8.6. *L'applicazione $\epsilon \colon \mathcal{S}_n \to \mathbb{K}^*$ è un omomorfismo di gruppi. (L'operazione in $\mathbb{K}^*$ è la moltiplicazione.)*

Dimostrazione. Siano $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_n$. Per la Proposizione 5.8.4 e la formula di Binet abbiamo

$$\epsilon(\sigma \circ \tau) = \operatorname{Det}(M_{\sigma \circ \tau}) = \operatorname{Det}(M_\sigma \cdot M_\tau) = \operatorname{Det}(M_\sigma) \cdot \operatorname{Det}(M_\tau) = \epsilon(\sigma) \cdot \epsilon(\tau).$$

□

Definizione 5.8.7. Un elemento $\sigma \in \mathcal{S}_n$ è una *trasposizione* se esistono $a \neq b \in \{1, \ldots, n\}$ tali che $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$ e $\sigma(i) = i$ per $i \in (\{1, \ldots, n\} \backslash \{a, b\})$.

Osservazione 5.8.8. Se $\sigma \in \mathcal{S}_n$ è una trasposizione $\epsilon(\sigma) = -1$. Infatti se $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$, allora la colonna a di M_σ è e_b, la colonna b di M_σ è e_a, e se $j \in (\mathbf{n}\backslash\{a,b\})$ la colonna j è e_j. Segue che scambiando le colonne a e b di M_σ otteniamo 1_n, e siccome $\mathrm{Det}(1_n) = 1$ otteniamo che $\mathrm{Det}(M_\sigma) = -1$.

Il seguente risultato mostra come calcolare $\epsilon(\sigma)$ per un qualsiasi $\sigma \in \mathcal{S}_n$.

Proposizione 5.8.9. *Ogni elemento di $\mathcal{S}_n$ è prodotto di trasposizioni. (Per convenzione il prodotto dell'insieme vuoto di permutazioni è l'identità di $\mathcal{S}_n$.)*

Dimostrazione. Per induzione su n. Se $n = 1$ l'affermazione è banalmente vera. (Se vi disturba iniziare dal prodotto dell'insieme vuoto di permutazioni, iniziate da $n = 2$. In questo caso l'affermazione è ancora banalmente vera.)

Dimostriamo il passo induttivo. Siano $n \geqslant 2$ e $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Supponiamo che $\sigma(n) = n$. Allora $\sigma(i) \in \mathbf{n\text{-}1}$ per $i \in \mathbf{n\text{-}1}$, e quindi possimao definire $\tau \in \mathcal{S}_{n-1}$ ponendo $\tau(i) = \sigma(i)$ per ogni $i \in \mathbf{n\text{-}1}$. Per ipotesi induttiva $\tau = \alpha_1 \circ \ldots \circ \alpha_l$ dove ciascun α_s è una trasposizione di $\mathcal{S}_{n-1}$. Per $s \in \mathbf{l}$ definiamo $\beta_s \in \mathcal{S}_n$ ponendo

$$\beta_s(i) := \begin{cases} \alpha_s(i) & \text{se } i \in (\mathbf{n\text{-}1}), \\ n & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Ciascuna β_s è una trasposizione di $\mathcal{S}_n$ e $\sigma = \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_l$. Ora supponiamo che $\sigma(n) \neq n$. Sia $m := \sigma(n)$, e definiamo $\alpha \in \mathcal{S}_n$ ponendo

$$\alpha(i) := \begin{cases} m & \text{se } i = n, \\ n & \text{se } i = m, \\ i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La composizione $\alpha \circ \sigma$ manda n in n, e quindi abbiamo appena dimostrato che è un prodotto di trasposizioni:

$$\alpha \circ \sigma = \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_l. \tag{5.8.4}$$

Siccome α è una trasposizione $\alpha \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathbf{n}}$, e perciò moltiplicando ambo i membri di (5.8.4) per α otteniamo la scrittura come prodotto di trasposizioni

$$\sigma = \alpha \circ \beta_1 \circ \ldots \circ \beta_l.$$

□

Osservazione 5.8.10. Sia $\mathcal{S}_n$. Per la Proposizione 5.8.9, la Proposizione 5.8.6 e l'Osservazione 5.8.8 $\epsilon(\sigma) \in \{1, -1\}$ per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Per questo $\epsilon(\sigma)$ si chiama il *segno* di σ. A essere precisi $\epsilon(\sigma)$ dipende dal campo $\mathbb{K}$ perchè è un elemento di $\mathbb{K}$: denotiamolo provvisoriamente $\epsilon_{\mathbb{K}}(\sigma)$. Ragionando un attimo ci si rende conto che $\epsilon_{\mathbb{K}}(\sigma)$ è noto quando è noto $\epsilon_{\mathbb{Q}}(\sigma)$. Più precisamente se $\mathrm{char}\,\mathbb{K} \neq 2$, cioè $1 \neq -1$, allora per così dire vale $\epsilon_{\mathbb{K}}(\sigma) = \epsilon_{\mathbb{Q}}(\sigma)$, mentre se $\mathrm{char}\,\mathbb{K} = 2$, cioè $1 = -1$, allora $\epsilon_{\mathbb{K}}(\sigma) = 1$ per ogni $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Una permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_n$ è *pari* se $\epsilon_{\mathbb{Q}}(\sigma) = 1$, ed è *dispari* se $\epsilon_{\mathbb{Q}}(\sigma) = -1$.

Esempio 5.8.11. Sia $\sigma \in \mathcal{S}_4$ definita da

$$\sigma(1) = 3, \quad \sigma(2) = 4, \quad \sigma(3) = 1, \quad \sigma(4) = 2.$$

Per calcolare la parità di σ, cioè se σ è pari o dispari, ci basta produrre una serie di scambi che partono dalla successione $\{3,4,1,2\}$ e finiscono con $\{1,2,3,4\}$, e contare il numero di scambi. Esplicitamente

$$\{3,4,1,2\} \rightsquigarrow \{3,2,1,4\} \rightsquigarrow \{1,2,3,4\}.$$

Siccome il numero di scambi è 2 concludiamo che σ è una permutazione pari.

Finalmente possiamo dare la classica formula chiusa per il determinante:

Proposizione 5.8.12. *Siano $\mathbb{K}$ un campo e $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora*

$$\operatorname{Det} A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \ldots a_{n,\sigma(n)}, \tag{5.8.5}$$

dove $\epsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ è dato dalla Definizione 5.8.5.

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.8.3 è sufficiente dimostrare che $\operatorname{Det}(M_{\sigma^{-1}}) = \epsilon(\sigma)$. Ma $\operatorname{Det}(M_{\sigma^{-1}}) = \epsilon(\sigma^{-1})$, e siccome l'applicazione $\epsilon \colon \mathcal{S}_n \to \mathbb{K}^*$ è un omomorfismo di gruppi (Proposizione 5.8.6), si ha che $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)^{-1}$. Ma $\epsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$ e quindi $\epsilon(\sigma)^{-1} = \epsilon(\sigma)$.

□

5.9 Determinanti con entrate in un anello

Sia R un anello (commutativo con unità). Facciamo la seguente

Ipotesi 5.9.1. R è un sottoanello di un campo $\mathbb{K}$.

Con questa ipotesi la formule di Binet, lo sviluppo di Laplace, la formula di Cramer e l'"ultima" formula per il determinante (la Proposizione 5.8.12) valgono per le matrici di $M_{n,n}(R)$ perchè

$$M_{n,n}(R) \subset M_{n,n}(\mathbb{K}).$$

In particolare valgono per $R = \mathbb{Z}$, perchè $\mathbb{Z}$ è un sottoanello di $\mathbb{Q}$, e per $R = \mathbb{K}[x]$ perchè $\mathbb{K}[x]$ è un sottoanello del campo delle funzioni razionali $\mathbb{K}(x)$.

Proposizione 5.9.2. *Sia R un anello e supponiamo che valga l'Ipotesi 5.9.1. Sia $A \in M_{n,n}(R)$. Esiste $B \in M_{n,n}(R)$ tale che $A \cdot B = B \cdot A = 1_n$ se e solo se* $\operatorname{Det} A$ *è invertibile in R.*

Dimostrazione. Se esiste B tale che $A \cdot B = B \cdot A = 1_n$, allora la Formula di Binet (che, come abbiamo appena osservato, vale per matrici in $M_{n,n}(R)$) dà che

$$1 = \operatorname{Det}(1_n) = \operatorname{Det}(A \cdot B) = \operatorname{Det}(A) \cdot \operatorname{Det}(B),$$

e quindi $\operatorname{Det} A$ è invertibile in R. Ora supponiamo che $\operatorname{Det} A$ sia invertibile in R, cioè $\operatorname{Det} A \neq 0$ e $\operatorname{Det} A^{-1} \in R$. Sicome la matrice dei cofattori A^c è contenuta in $M_{n,n}(R)$, lo è anche $\operatorname{Det} A^{-1} \cdot A^c \in M_{n,n}(R)$. La Fomula di Cramer (che, come abbiamo appena osservato, vale per matrici in $M_{n,n}(R)$) dà che

$$A \cdot (\operatorname{Det} A^{-1} \cdot A^c) = (\operatorname{Det} A^{-1} \cdot A^c) \cdot A = 1_n.$$

□

5.10 Polinomio caratteristico e diagonalizzazione

Polinomio caratteristico

Nella Sezione 3.12 abbiamo introdotto il problema della determinazione (se esiste) di una base che diagonalizza un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato. Il determinante gioca un ruolo chiave nell'approccio a questo problema. Il punto di partenza è la seguente semplice osservazione.

Osservazione 5.10.1. Siano V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$ e $f \colon V \to V$ un endomorfismo. Un $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è un autovalore di f se e solo se $\operatorname{Det}(\lambda_0 \operatorname{Id}_V - f) = 0$. Infatti λ_0 è un autovalore di f se e solo se esiste $0 \neq v$ tale che $f(v) = \lambda_0 v$, cioè se e solo se $\ker(\lambda_0 \operatorname{Id}_V - f) \neq \{0\}$ ovvero $\operatorname{Det}(\lambda_0 \operatorname{Id}_V - f) = 0$.

Supponiamo che $\dim V = n$, e sia $\mathcal{B}$ una base di V. Quindi $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Per definizione

$$\operatorname{Det}(\lambda \operatorname{Id}_V - f) = \operatorname{Det} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda \operatorname{Id}_V - f) = \operatorname{Det}(\lambda 1_n - A).$$

Notiamo che $\lambda 1_n - A$ è una matrice quadrata con entrate nell'anello $\mathbb{K}[\lambda]$, e quindi il suo determinante è un ben definito elemento di $\mathbb{K}[\lambda]$.

Proposizione 5.10.2. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$. Allora $\operatorname{Det}(\lambda 1_n - A)$ ha grado n ed è monico, cioè il coefficiente di λ^n è 1.*

Dimostrazione. Abbiamo

$$\lambda 1_n - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ddots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \ddots & \lambda - a_{n-1,n-1} & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & \dots & \dots & \dots & \dots & -a_{n,n-1} & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \tag{5.10.1}$$

Per la Proposizione 5.8.12, che vale per determinanti di matrici con entrate in $\mathbb{K}[\lambda]$ (vedi la Sezione 5.9) troviamo che $\operatorname{Det}(\lambda 1_n - A)$ è la somma di $n!$ addendi, ciascuno dei quali è un prodotto di polinomi in λ a coefficienti in $\mathbb{K}$, di grado al più 1, e perciò $\operatorname{Det}(\lambda 1_n - A)$ è un polinomio in λ a coefficienti in $\mathbb{K}$, di grado al più n. Inoltre l'unico addendo che dà il monomio λ^n è $(\lambda - a_{11}) \cdot \ldots \cdot (\lambda - a_{nn})$, e quindi il coefficiente di λ^n è 1. □

Definizione 5.10.3. Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, il *polinomio caratteristico di A* è $\operatorname{Det}(\lambda 1_n - A)$, e si denota p_A.

Proposizione 5.10.4. *Se $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ sono coniugate, allora $p_A = p_B$.*

Dimostrazione. Siccome A, B sono coniugate esiste $G \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $A = G \cdot A \cdot G^{-1}$. Quindi

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \operatorname{Det}(\lambda 1_n - A) = \operatorname{Det}(\lambda 1_n - G \cdot B \cdot G^{-1}) = \operatorname{Det}(G \cdot \lambda 1_n \cdot G^{-1} - G \cdot B \cdot G^{-1}) = \\ &= \operatorname{Det}(G \cdot (\lambda 1_n - B) \cdot G^{-1}) = \operatorname{Det}(G) \cdot \operatorname{Det}(\lambda 1_n - B) \cdot \operatorname{Det}(G^{-1}) = \operatorname{Det}(\lambda 1_n - B) = p_B(\lambda). \end{aligned}$$

□

Definizione 5.10.5. Siano V uno spazio vettoriale finitamente generato di dimensione n, e $f : V \to V$ un suo endomorfismo. Allora polinomio caratteristico di $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$, che non dipende dalla base $\mathcal{B}$ di V per la Proposizione 5.10.2, si chiama il *polinomio caratteristico di f* e si denota p_f.

Osservazione 5.10.6. Siano $A, B \in M_{n,n}(k)$. Se A e B sono coniugate, allora i loro polinomi caratteristici sono uguali. In altre parole; per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$ il coefficiente di λ^i del determinante della matrice in (5.10.1) è un polinomio nelle $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ (omogeneo di grado $(n-i)$) che è **invariante per coniugazione**. Il coefficiente di λ^n è la costante 1, che è invariante ma non dà alcuna informazione. Il coefficiente di λ^0, cioè il termine "costante" (significa che dipende da $a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}$ ma *non* da λ) è $(-1)^n \operatorname{Det}(A)$, e già sappiamo che è invariante eper coniugazione. Il coefficiente di λ^{n-1} è quella che si chiama la *traccia* di A, e ed è dato da

$$\operatorname{Tr} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Quindi se A e B sono coniugate, allora $\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(B)$.

Esempio 5.10.7. Siano $A, B \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$ date da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, B := \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Siccome $\mathrm{Tr}(A) = 15$ e $\mathrm{Tr}(B) = 7$, A non è coniugata a B. Notate che $\mathrm{Det}(A) = 6 = \mathrm{Det}(B)$.

Diagonalizzazione

Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n e $f \colon V \to V$ un suo endomorfismo. Supponiamo di voler capire se f è diagonalizzabile e, nel caso lo sia, determinare una base che diagonalizza f. Siccome gli autovalori di f sono le radici del polinomio caratteristico di f (per l'Osservazione 5.10.1), il primo passo da fare è calcolare il polinomio caratteristico di f. Assumiamo di essere in grado di calcolarne le radici di p_f. Il seguente risultato ci dà una condizione necessaria perchè f sia diagonalizzabile.

Proposizione 5.10.8. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$, di dimensione n. Se un endomorfismo $f \colon V \to V$ è diagonalizzabile, allora P_f ha n radici (contate con molteplicità) in $\mathbb{K}$, cioè esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $P_f = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V che diagonalizza f, cioè esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Sia $A := M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$. La matrice A è diagonale, più precisamente $A = (\lambda_i \delta_{ij})$. Quindi

$$p_f = \mathrm{Det}(\lambda 1_n - A) = \mathrm{Det}(((\lambda - \lambda_i)\delta_{ij})) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \lambda_i). \tag{5.10.2}$$

$\square$

L'Esempio 3.12.10 dimostra che *non* vale il viceversa della Proposizione 5.10.8, cioè *non* è vero che se p_f è prodotto di fattori lineari allora f è diagonalizzabile; infatti il polinomio caratteristico della matrice N dell'Esempio 3.12.10 ha polinomio caratteristico λ^2, che è un prodotto di fattori lineari, ma N non è diagonalizzabile.

Proposizione 5.10.9. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$. Siano $f \colon V \to V$ un endomorfismo e $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ un autovalore di f. Allora*

$$1 \leqslant \dim V_{\lambda_0}(f) \leqslant \mathrm{mult}_{\lambda_0} p_f. \tag{5.10.3}$$

Dimostrazione. La diseguaglianza $1 \leqslant \dim V_{\lambda_0}(f)$ vale per definizione di autovalore. Per dimostrare la seconda diseguaglianza poniamo $r := \dim V_{\lambda_0}(f)$. Estendiamo una base $\{v_1, \ldots, v_r\}$ di $V_{\lambda_0}(f)$ a una base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ di V. Quindi $f(v_i) = \lambda_0 v_i$ per $i \leqslant r$. Abbiamo che

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\lambda \,\mathrm{Id}_V - f) = \begin{bmatrix} (\lambda-\lambda_0) & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ 0 & (\lambda-\lambda_0) & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ldots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & (\lambda-\lambda_0) & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{bmatrix} \tag{5.10.4}$$

dove il numero di colonne in cui appare $(\lambda - \lambda_0)$ è uguale a r. Sviluppando il determinante secondo la prima colonna e iterando troviamo che $p_f = (\lambda - \lambda_0)^r \cdot q$ dove $q \in \mathbb{K}[\lambda]$. Segue che

$$\dim V_{\lambda_0}(f) = r \leqslant \mathrm{mult}_{\lambda_0} p_f.$$

. $\square$

Corollario 5.10.10. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$ e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Allora*

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{K}} \dim V_\lambda(f) \leqslant \dim V. \tag{5.10.5}$$

(Se $\mathbb{K}$ è un campo infinito la sommatoria sulla sinistra ha un insieme infinito di indici, ma la somma ha senso perchè $\dim V_\lambda(f) > 0$ solo se λ è un autovalore di f, e quindi per un insieme di indici di cardinalità al più $\dim V$ per l'Osservazione 5.10.1 e la Proposizione 5.10.2.)

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.10.9, la disequazione (1.7.9) e la Proposizione 5.10.2 abbiamo che

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{K}} \dim V_\lambda(f) \leqslant \sum_{\lambda \in \mathbb{K}} \operatorname{mult}_\lambda p_f \leqslant \deg p_f = \dim V. \tag{5.10.6}$$

□

Definizione 5.10.11. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$ e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. La *molteplicità geometrica* di $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ è la dimensione di $V_{\lambda_0}(f)$.

Quindi la Proposizione 5.10.9 afferma che la molteplicità geometrica è al più uguale alla molteplicità algebrica. La proposizione che segue è il principale risultato di questa sezione.

Proposizione 5.10.12. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$. Un endomorfismo $f\colon V \to V$ è diagonalizzabile se e solo se vale una dellke seguenti condizioni:*

1. *Il numero di radici di p_f in $\mathbb{K}$ (contate con molteplicità) è uguale al grado di p_f, e per ogni autovalore λ di f si ha che*
$$\dim V_\lambda(f) = \operatorname{mult}_\lambda(p_f). \tag{5.10.7}$$
2. *Vale l'eguaglianza in* (5.10.5), *cioè* $\sum_{\lambda \in \mathbb{K}} \dim V_\lambda(f) = \dim V$.

La dimostrazione della Proposizione 5.10.12 segue la dimostrazione di un risultato preliminare.

Lemma 5.10.13. *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Se $v_1, \ldots, v_d \in V$ sono autovettori con autovalori distinti allora $v_1, \ldots, v_d$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Per induzione su d. Se $d = 1$ il risultato è vero perchè per definizione un autovettore è non nullo. Dimostriamo il passo induttivo. Sia $d > 1$. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_d$ siano linearmente dipendenti. Quindi esistono $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$0 = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_d v_d. \tag{5.10.8}$$

In verità *ciascun* α_i è non nullo perchè se un α_i si annullasse avremmo una relazione di dipendenza lineare tra una lista di autovettori con autovalori associati distinti contenente meno di d elementi, contro l'ipotesi induttiva. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ gli autovalori rispettivamente di $v_1, \ldots, v_d$. Applicando f otteniamo

$$0 = f(0) = f(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_d v_d) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_d \lambda_d v_d. \tag{5.10.9}$$

Da questa relazione segue che nessun λ_i è nullo, perchè altrimenti avremmo una relazione di dipendenza lineare tra una lista di $(d-1)$ autovettori con autovalori associati distinti, contro l'ipotesi induttiva. Moltiplicando (5.10.9) per λ_d^{-1} otteniamo che

$$0 = \alpha_1 \lambda_d^{-1} \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_{d-1} \lambda_d^{-1} \lambda_{d-1} v_d + \alpha_d v_d. \tag{5.10.10}$$

Sottraendo (5.10.10) da (5.10.8) si ha che

$$\alpha_1 (1 - \lambda_d^{-1} \lambda_1) v_1 + \ldots + \alpha_{d-1} (1 - \lambda_d^{-1} \lambda_{d-1}) v_{d-1} = 0. \tag{5.10.11}$$

Sia $1 \leqslant i \leqslant (d-1)$. Siccome $\alpha_i \neq 0$ e, siccome $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ sono distinti abbiamo anche che $(1 - \lambda_d^{-1} \lambda_i) \neq 0$. Quindi $\alpha_i (1 - \lambda_d^{-1} \lambda_i) \neq 0$. Per (5.10.11) segue che $v_1, \ldots, v_{d-1}$ sono linearmente dipendenti, e questo contraddice l'ipotesi induttiva. Segue che $v_1, \ldots, v_d$ sono linearmente indipendenti. □

Dimostrazione della Proposizione 5.10.12. Iniziamo osservando che le condizioni (1) e (2) sono equivalenti. Infatti se vale (1) allora vale (2) perchè

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{K}} \operatorname{mult}_\lambda(p_f) = \deg p_f = \dim V,$$

e d'altra parte se vale (2) allora $\dim V_\lambda(f) = \operatorname{mult}_\lambda(p_f)$ per la Proposizione 5.10.9.

Ora supponiamo che f sia diagonalizzabile, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base che diagonalizza f. Sia λ_i l'autovalore associato a v_i, cioè $f(v_i) = \lambda_i v_i$. Il numero di radici di p_f in $\mathbb{K}$ (contate con molteplicità) è uguale alla dimensione di V per la Proposizione 5.10.8. L'espressione di p_f data da (5.10.2) mostra che

$$\operatorname{mult}_{\lambda_j}(p_f) = |\{1 \leqslant i \leqslant n \mid \lambda_i = \lambda_j\}|. \tag{5.10.12}$$

Siccome ogni v_i tale che $\lambda_i = \lambda_j$ appartiene a $V_{\lambda_j}(f)$ vediamo anche che $\dim V_{\lambda_j}(f) \geqslant \operatorname{mult}_{\lambda_j}(p_f)$, e quindi si ha equaglianza per la Proposizione 5.10.9. Abbiamo dimostrato che se f è diagonalizzabile vale (1), e quindi anche (2) perchè (1) e (2) sono equivalenti.

Ora supponiamo che valga (1) e dimostriamo che f è diagonalizzabile. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ gli autovalori *distinti* di f. Per $1 \leqslant i \leqslant d$ sia

$$\{v_{i,1}, \ldots, v_{i,n(i)}\}$$

una base di $V_{\lambda_i}(f)$ (quindi $n(i) = \dim V_{\lambda_i}(f)$). Dimostriamo che

$$\{v_{1,1}, \ldots, v_{1,n(1)}, \ldots, v_{i,1}, \ldots, v_{i,n(i)}, \ldots v_{d,1}, \ldots, v_{d,n(d)}\} \tag{5.10.13}$$

è una base di V. Applicando il Lemma 5.10.13 si vede che i vettori di (5.10.13) sono linearmente indipendenti, d'altra parte il loro numero è

$$n(1) + n(2) + \ldots + n(d) = \sum_{\lambda\in\mathbb{K}} \dim V_\lambda(f) = \sum_{\lambda\in\mathbb{K}} \operatorname{mult}_\lambda(p_f) = \deg p_f = \dim V.$$

(La seconda uguaglianza segue da (5.10.7), la terza dall'ipotesi che il numero di radici di p_f in $\mathbb{K}$ (contate con molteplicità) è uguale al grado di p_f.) Segue che (5.10.13) è una base di V. Siccome i vettori della base (5.10.13) sono autovettori di f la f è diagonalizzabile. □

Corollario 5.10.14. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n Sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo. Se p_f ha n radici distinte (in $\mathbb{K}$) allora f è diagonalizzabile.*

La dimostrazione della Proposizione 5.10.12 dà una procedura per trovare una base che diagonalizza un endomorfismo diagonalizzabile, *purchè si sappiano determinare le radici del polinomio caratteristico.* (Il significato dell'ultima frase meriterebbe un commento ma tralasciamo.) Illustraimo la procedura con qualche esempio.

Esempio 5.10.15. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{bmatrix}.$$

Decidiamo se A è diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A è

$$p_A = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -\frac{1}{4} & -2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4}.$$

Le radici di p_A sono $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, e quindi A è diagonalizzabile per il Corollario 5.10.14. Troviamo una base che diagonalizza A. Autovettori con autovalori λ_1 e λ_2 sono dati dalle soluzioni non banali dei sistemi di equazioni lineari

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{3}{2} & 5 \\ -\frac{1}{4} & -2+\frac{3}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0, \qquad \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{2} & 5 \\ -\frac{1}{4} & -2-\frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Risolvendo vediamo che $\mathcal{B} := \{(2,-1),(10,-1)\}$ è una base di autovettori di A. In altre parole

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Ora usiamo questo risultato per calcolare A^{10}. Sia $\mathcal{S}$ la base standard di $\mathbb{Q}^2$. Abbiamo

$$A = M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{S}}(L_A) = M_{\mathcal{S}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}^2}) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(L_A) \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{Q}^2}) = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Quindi

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3^{10}}{2^{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Calcolando troviamo che

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

e quindi

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3^{10}}{2^{10}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^{10}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5-3^{10}}{2^{12}} & \frac{5-3^{10}\cdot 5}{2^{11}} \\ \frac{1}{2^{12}} & \frac{3^{10}\cdot 5-1}{2^{12}} \end{bmatrix}.$$

(Non conviene convertire in notazione decimale.)

Esempio 5.10.16. Sia $A \in M_{3,3}(\mathbb{Q})$ data da

$$A := \begin{bmatrix} 0 & -4 & -1 \\ 3 & 13 & 3 \\ -12 & -48 & -11 \end{bmatrix}.$$

Ci chiediamo se A sia diagonalizzabile. Il polinomio caratteristico di A è $p_A = \lambda(\lambda-1)^2$, e quindi il numero delle sue radici contate con molteplicità è uguale a 3, cioè la dimensione di $\mathbb{Q}^3$. Siccome la radice 1 ha molteplicità 2, A è diagonalizzabile se e solo se $V_1(L_A)$ ha dimensione 2. L'autospazio $V_1(L_A)$ è il sottospazio delle soluzione del sistema di equazioni lineari

$$A := \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 3 & 12 & 3 \\ -12 & -48 & -12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0. \tag{5.10.14}$$

Siccome la matrice 3×3 che appare in (5.10.14) ha rango 1, lo spazio delle soluzioni ha dimensione 2 e quindi A è diagonalizzabile.

5.11 Autovettori miliardari[1]

Il successo di Google è dovuta all'efficienza del suo algoritmo (PageRank) che assegna un grado di importanza ("ranking") a ciascuna pagina del web. L'algoritmo di Sergey Brin e Larry Page, i creatori di Google, riduce il calcolo dei gradi di importanza al calcolo di un autovettore di una matrice quadrata (di dimensioni enormi) di tipo particolare (stocastica). Prima descriveremo la matrice e poi discuteremo come calcolare l'autovettore (non si calcola risolvendo un sistema di milioni di equazioni lineari in milioni di incognite). Per maggiori dettagli potete consultare [2].

Siano $\{1,2,\ldots,n\}$ le pagine web. Il problema è di dare una "giusta" importanza x_i (un numero reale) alla pagina i per ogni $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ (ovviamente l'importanza cambia giorno per giorno) sapendo, per ogni $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$, se esiste o non esiste un link dalla pagina j alla pagina i. Per determinare il vettore $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ che dà la classifica delle pagine web seguiamo due principi:

[1]Ringrazio René Schoof per avermi parlato di questo argomento, e per aver condiviso con me i suoi appunti.

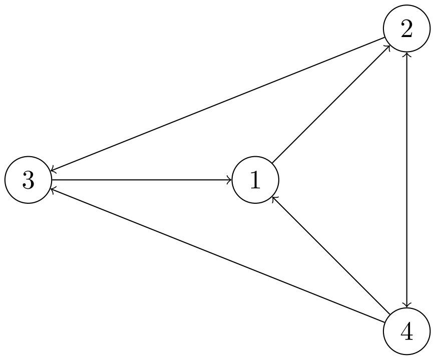

Figura 5.1: Esempio di link tra 4 pagine web

1. i è importante se riceve molti link da pagine importanti (una condizione apparentemente circolare),
2. una pagina web da cui partono molti link non conta più di una pagina web da cui partono pochi link nel formare la classifica.

Sia n_j il numero di link che partono dalla pagina web j. Una formula che ragionevolmente segue dai due principi è che deve valere l'equazione

$$x_i = \sum_{j \mapsto i} \frac{x_j}{n_j}, \tag{5.11.1}$$

dove $j \mapsto i$ significa che la pagina web j ha un link che arriva alla pagina web i. Infatti l'equazione in (5.11.1) dice che la pagina web j contribuisce al punteggio di i proporzionalmente al suo punteggio normalizzato in base al numero di link che partono dalla pagina web j. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{Q})$ la matrice definita da

$$a_{ij} := \begin{cases} \frac{1}{n_j} & \text{se } j \mapsto i, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{5.11.2}$$

L'equazione in (5.11.1) mostra che $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è un autovettore di A con autovalore 1.

Esempio 5.11.1. L'esempio di link tra 4 pagine web nella Figura 5.1 dà la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'autospazio di autovalore 1 è generato da $(5, 6, 4, 3)$. Quindi la pagina web più importante è la 2, seguita dalla 5, la terza è la 3 e l'ultima è la 4. Notate che le prime tre hanno lo stesso numero di pagine che hanno un link verso di loro.

Ora sorgono varie domande. Data la matrice A, esiste un autovettore di autovalore 1? L'autospazio $V_1(A)$ ha dimensione 1? Supponendo la risposta sia affermativa, esiste un generatore di $V_1(A)$ con entrate non negative? (Se un autovettore $X = (x_1, \ldots, x_n)$ di autovalore 1 ha entrate negative e positive, quale "ranking" scegliamo, X o $-X$?) Infine, supponendo che le risposte alle domande precedenti siano affermative, qual'è il metodo più efficiente per calcolare un autovettore di autovalore 1? (Siccome la matrice è enorme l'eliminazione di Gauss prende troppo tempo.)

Proposizione 5.11.2. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ una matrice tale che la somma delle entrate di ciascuna colonna è uguale a* 1*, cioè*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1 \tag{5.11.3}$$

per ogni $j \in \{1, \ldots, n\}$. Allora esiste un autovettore di A di autovalore 1.

Dimostrazione. Il vettore $(1,\ldots,1)$ è un autovettore di autovalore 1 della trasposta A^t per l'uguaglianza in (5.11.3). Ma il polinomio caratteristico di A è uguale a quello di A^t perchè

$$p_{A^t}(\lambda) = \mathrm{Det}(\lambda 1_n - A^t) = \mathrm{Det}((\lambda 1_n - A^t)^t) = \mathrm{Det}(\lambda 1_n - A) = p_A(\lambda).$$

Quindi 1 è un autovalore di A. □

In generale non è vero che l'autospazio $V_1(A)$ ha dimensione 1, anche se facciamo l'ipotesi che $a_{ij} \in \mathbb{Q}$ con $a_{ij} \geqslant 0$ per ogni i,j (come nel nostro caso). Per esempio l'autospazio $V_1(A)$ ha dimensione almeno 2 se A è una matrice a blocchi

$$\begin{bmatrix} * & \ldots & * & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ * & \ldots & * & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \\ \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & * & \ldots & * \end{bmatrix}$$

Le domande formulate hanno risposte positive se la somma delle entrate di ciascuna colonna è uguale a 1 e inoltre a_{ij} è un reale positivo per ogni i,j. (Una matrice $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è *stocastica per colonne* se ha entrate non negative e la somma delle entrate di ciascuna colonna è uguale a 1.) La matrice definita da (5.11.2) non ha entrate positive, esistono molte entrate nulle. Per questo motivo si approssima A con una matrice che soddisfa tutte le proprietà appena elencate, precisamente $(1-\epsilon)A + \epsilon E_n$, dove ϵ è un reale molto piccolo ed E_n è la matrice con entrate tutte uguali a $1/n$. Fatto questo (a costo di far torto, di poco, a qualche pagina web che si troverà retrocessa) si applicano i risultati seguenti.

Proposizione 5.11.3. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice con entrate positive e tale che la somma delle entrate di ciascuna colonna sia uguale a* 1*. Allora l'autospazio di A di autovalore* 1 *ha dimensione* 1 *ed è generato da un vettore con tutte le entrate positive o nulle.*

Dimostrazione. Sia $X = (x_1,\ldots,x_n)$ un autovettore di A di autovalore 1. Supponiamo che esistano indici $k,h \in \{1,\ldots,n\}$ tali che tali che $x_k \neq 0 \neq x_h$ e x_k, x_h abbiano segni diversi (in altre parole $x_k \cdot x_h < 0$). Siccome $x_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ e tutti gli a_{ij} sono positivi, segue che $|x_i| < \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j|$. Ma allora abbiamo che

$$\sum_{i=1}^n |x_i| < \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}|x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}|x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j|,$$

e questo è assurdo. Per la Proposizione 5.11.2 sappiamo che $\dim V_1(A) \geqslant 1$. Supponiamo che $\dim V_1(A) > 1$. Siano $X, Y \in V_1(A)$ linearmente indipendenti. Siccome la matrice $2 \times n$ con righe X e Y ha rango 2, esiste una sottomatrice 2×2 che ha rango 2, diciamo che sia

$$\begin{bmatrix} x_k & x_h \\ y_k & y_h \end{bmatrix}.$$

Segue che esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda(x_k, x_h) + \mu(y_k, y_h) = (1, -1)$. Ma allora l'autovettore di autovalore 1 dato da $\lambda X + \mu Y$ ha entrate di segni diversi ai posti k e h, e questo contraddice ciò che abbiamo dimostrato. Questo dimostra che $\dim V_1(A) = 1$. Sia X un generatore di $V_1(A)$. Per quello che abbiamo dimostrato o tutte le entrate di X sono non negative o non positive. Nel primo caso abbiamo fatto, nel secondo prendiamo come generatore $-X$. □

I prossimi due risultati danno il metodo con cui si approssima in modo efficiente un generatore di $V_1(A)$. Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice con entrate positive e tale che la somma delle entrate di ciascuna colonna è uguale a 1, poniamo

$$c(A) := 1 - 2\min\{a_{ij}\}. \tag{5.11.4}$$

Siccome $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ per ogni j e $a_{ij} > 0$ per ogni i,j abbiamo che $0 < \min\{a_{ij}\} \leqslant 1/n$. Quindi

$$\frac{n-2}{n} \leqslant c(A) < 1. \tag{5.11.5}$$

Lemma 5.11.4. *Sia $n \geqslant 2$ e sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice con entrate positive e tale che la somma delle entrate di ciascuna colonna sia uguale a 1. Sia $X = (x_1, \ldots, x_n)$ un vettore di $\mathbb{R}^n$ con entrate la cui somma è nulla, e sia $Y = (y_1, \ldots, y_n) = A \cdot X$. Allora*

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i| \leqslant c(A) \sum_{i=1}^{n} |x_i|. \tag{5.11.6}$$

Dimostrazione. Sia $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ data dalla somma delle entrate, cioè $f(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Allora $L_A(\ker(f)) \subset \ker(f)$. Infatti se $X \in \mathbb{R}^n$ abbiamo

$$f(L_A(X)) = f(A \cdot X) = \sum_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j = f(X).$$

Quindi se $f(X) = 0$ allora $f(L_A(X)) = 0$. Ora sia X come nell'enunciato del lemma, cioè $X \in \ker(f)$, e poniamo $Y := A \cdot X$. Allora $Y \in \ker(f)$ per quello che abbiamo appena dimostrato. Se $Y = 0$ allora la diseguaglianza in (5.11.6) vale perchè $c(A) \geqslant 0$. Quindi possiamo supporre che $Y \neq 0$. Sia ϵ_i il segno di y_i (se $y_i = 0$ allora $\epsilon_i = 0$). Siccome $y_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j$, abbiamo $|y_i| = \epsilon_i \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j$, e quindi

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i| = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_{ij} x_j. \tag{5.11.7}$$

Siccome $Y \in \ker(f)$ esistono almeno due entrate di Y non nulle e di segni opposti, e quindi dall'uguaglianza $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ segue che $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_{ij} \leqslant c(A)$. Siccome $c(A) \geqslant 0$ (vedi (5.11.5)) segue che $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i a_{ij} x_j \leqslant c(A)|x_j|$, e allora la diseguaglianza in (5.11.6) segue dalle uguaglianze in (5.11.7). □

Corollario 5.11.5. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice con entrate positive e tale che la somma delle entrate di ciascuna colonna sia uguale a 1. Sia $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(X) := \sum_{i=1}^{n} x_i \neq 0$. La successione di vettori di $\mathbb{R}^n$ data da*

$$X, A \cdot X, A^2 \cdot X, \ldots, A^m \cdot X, \ldots, \tag{5.11.8}$$

tende a un generatore di $V_1(A)$.

Dimostrazione. Se $n = 1$ il risultato è banale, quindi possiamo assumere che $n \geqslant 2$. Se $Y \in V_1(A)$ è non nullo, allora $Y \notin \ker(f)$ per la Proposizione 5.11.3 (un vettore non nullo in $\ker(f)$ ha almeno due entrate di segni opposti), e perciò

$$\mathbb{R}^n = V_1(A) \oplus \ker(f).$$

Per ipotesi $X \notin \ker(f)$, quindi $X = Y + Z$ dove $Y \in V_1(A)$ è non nullo. Abbiamo

$$A^k \cdot X = A^k \cdot (Y + Z) = A^k \cdot Y + A^k \cdot Z = Y + A^k \cdot Z. \tag{5.11.9}$$

Poniamo $Z(k) = (z(k)_1, z(k)_2, \ldots, z(k)_n) := A^k \cdot Z$. Per il Lemma 5.11.4 abbiamo che

$$|z(k)_1| + \ldots + |z(k)_i| + \ldots + |z(k)_n| \leqslant c(A)^k (|z_1| + \ldots + |z_i| + \ldots + |z_n|).$$

Siccome $c(A) < 1$ (vedi (5.11.5)) segue che $A^k \cdot Z$ converge a 0 per $k \to \infty$, quindi la successione in (5.11.8) tende a Y per $k \to \infty$. Siccome $Z \notin \ker(f)$ abbiamo che $Y \neq 0$. □

5.12 Gruppo lineare reale

Sia V uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Se $g \in \mathrm{GL}(V)$ allora $\det(g) \neq 0$ e quindi si hanno due possibilità: il determinante di g è positivo o negativo. Il determinante dell'identità è 1, quindi positivo, e se $g, h \in \mathrm{GL}(V)$ hanno determinante positivo allora $g \cdot h$ ha determinante positivo (per Binet), e anche g^{-1} (sempre per Binet). Quindi il sottoinsieme

$$\mathrm{GL}^{+}(V) := \{g \in \mathrm{GL}(V) \mid \det(g) > 0\} \tag{5.12.1}$$

è un sottogruppo di $\mathrm{GL}(V)$. Dimostrermo che si può passare con continuità da ogni elemento di $\mathrm{GL}^{+}(V)$ a ogni altro elemento di $\mathrm{GL}^{+}(V)$, ma che non si può passare con continuità da un elemento di $\mathrm{GL}^{+}(V)$ a un elemento di $(\mathrm{GL}(V)\backslash \mathrm{GL}^{+}(V))$. Per dare un senso all'affermazione va definito cosa intendiamo per funzione continua da un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathrm{GL}(V)$.

Definizione 5.12.1. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo. Se V è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita n un'applicazione $\gamma\colon I \to \mathrm{GL}(V)$ è *continua* se, scelta una qualsiasi base $\mathcal{B}$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & M_{n,n}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\gamma(t)) \end{array} \tag{5.12.2}$$

è continua (questo ha senso perchè identifichiamo $M_{n,n}(\mathbb{R})$ con $\mathbb{R}^{n^2}$).

Osservazione 5.12.2. Per assicurarsi che $\gamma\colon I \to \mathrm{GL}(V)$ sia continua è sufficiente verificare che l'applicazione in (5.12.2) sia continua per *una* base $\mathcal{B}$. Infatti se $\mathcal{C}$ è una qualsiasi base allora $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\gamma(t)) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{Id}_V) \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\gamma(t)) \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}_V)$, quindi le entrate di $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(\gamma(t))$ sono combinazioni lineari delle entrate di $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(\gamma(t))$ e perciò funzioni continue.

Definizione 5.12.3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione finita. Un automorfismo $g \in \mathrm{GL}(V)$ è *deformabile* in un automorfismo $h \in \mathrm{GL}(V)$ se esiste un'applicazione continua $\gamma\colon [a, b] \to \mathrm{GL}(V)$ tale che $\gamma(a) = g$ e $\gamma(b) = h$.

Esempio 5.12.4. Sia $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sia ottenuta da A aggiungendo alla colonna j, cioè A_j, un multiplo di un'*altra* colonna, diciamo λA_k (dove $k \neq j$):

$$B = [A_1, \ \cdots, \ A_{j-1}, \ A_j + \lambda A_k, \ A_{j+1}, \ \cdots, \ A_n].$$

Quindi $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e inoltre la matrice

$$\gamma(t) := [A_1, \ \cdots, \ A_{j-1}, \ A_j + t\lambda A_k, \ A_{j+1}, \ \cdots, \ A_n]$$

è invertibile per ogni $t \in \mathbb{R}$. Siccome l'applicazione $\gamma\colon [0, 1] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è continua e $\gamma(0) = A$, $\gamma(0) = B$, questo mostra che A è deformabile in B. Considerando la trasposta vediamo anche che se $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è ottenuta da A aggiungendo a una riga una combinazione lineare delle rimanenti righe, allora A è deformabile con continuità in B.

Esempio 5.12.5. Sia $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ e supponiamo che $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sia ottenuta da A scambiando tra di loro due colonne e cambiando segno a una delle due. In altre parole, se le colonne hanno indici j e k, con $j < k$, si ha

$$B = A \cdot [e_1, \ \cdots, \ e_{j-1}, \ e_k, \ e_{j+1}, \ \cdots, \ e_{k-1}, \ -e_j, \ e_{k+1}, \ \cdots, \ e_n], \tag{5.12.3}$$

oppure

$$B = A \cdot [e_1, \ \cdots, \ e_{j-1}, \ -e_k, \ e_{j+1}, \ \cdots, \ e_{k-1}, \ e_j, \ e_{k+1}, \ \cdots, \ e_n]. \tag{5.12.4}$$

Facciamo vedere che A è deformabile in B. Basta far vedere che la matrice unità 1_n è deformabile nella matrice invertibile che è a destra del prodotto in (5.12.3) e del prodotto in (5.12.4). Sia $\alpha\colon [0, \pi/2] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'applicazione continua data da

$$\alpha(t) := [e_1, \ \cdots, \ e_{j-1}, \ \cos t e_j + \sin t e_k, \ e_{j+1}, \ \cdots, \ e_{k-1}, \ -\sin t e_j + \cos t e_k, \ e_{k+1}, \ \cdots, \ e_n].$$

Allora $\alpha(0) = 1_n$ e $\alpha(\pi/2)$ è la matrice che è a destra del prodotto in (5.12.3). Analogamente si scrive un'applicazione continua $\beta\colon [0, \pi/2] \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tale che $\beta(0) = 1_n$ e $\beta(\pi/2)$ è la matrice che è a destra del prodotto in (5.12.4).

Osservazione 5.12.6. Se $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo e $\gamma\colon I \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ è un'applicazione continua, la funzione

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\gamma} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \det \gamma(t) \end{array}$$

è continua. Siccome γ non è mai nulla, il segno di γ è costante (Teorema di Bolzano). Ne segue che se $g \in \mathrm{GL}(V)$ è deformabile in $h \in \mathrm{GL}(V)$ allora i segni di $\det g$ e $\det h$ sono gli stessi.

Osservazione 5.12.7. La relazione tra elementi di $\mathrm{GL}(V)$ data dalla Definizione 5.12.3 è di equivalenza, lasciamo al lettore la semplice verifica di questo fatto.

Proposizione 5.12.8. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e siano $g, h \in \mathrm{GL}(V)$. Allora g è deformabile in h se e solo se sono entrambi elementi di* $\mathrm{GL}(V)$ *o di* $(\mathrm{GL}(V) \setminus \mathrm{GL}^+(V))$.

Dimostrazione. Abbiamo osservato che se $g, h \in \mathrm{GL}(V)$ hanno determinante di segni opposti, allora non sono deformabili l'uno nell'altro, vedi l'Osservazione 5.12.6.

Dimostriamo che se $g, h \in \mathrm{GL}^+(V)$, allora g è deformabile con continuità in h. Siccome $1_n \in \mathrm{GL}^+(V)$ e la deformabilità è una relazione di equivalenza, è sufficiente dimostrare che ogni $g \in \mathrm{GL}^+(V)$ è deformabile in Id_V. Questo equivale a dimostrare che ogni $A \in \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$ è deformabile in 1_n. La dimostrazione è per induzione su n. Il caso $n = 1$ è banalmente vero: $A = (a)$ con $a > 0$ e l'applicazione $\gamma\colon [1, 1/a] \to \mathrm{GL}_1^+(\mathbb{R})$ data da $\gamma(t) := ta$ deforma A in 1_1. Ora dimostriamo il passo induttivo. Sia $n \geqslant 2$ e sia $A \in \mathrm{GL}^+(\mathbb{R})$. Esiste una serie di operazioni elementari sulle colonne di A di tipo 2, cioè aggiunta a una colonna di un multiplo di un'altra colonna, che trasformano A in una matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ con una sola entrata non nulla sulla prima riga, diciamo sulla colonna j. Per l'Esempio 5.12.4 la matrice A è deformabile in B. Se $j < n$, sia $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ la matrice ottenuta scambiando le colonne j e n di A e moltiplicando per -1 la "nuova" colonna n se l'entrata sulla prima riga è negativa, moltiplicando per -1 la "nuova" colonna j in caso contrario. Per l'Esempio 5.12.5 la matrice B è deformabile in C. Se moltiplichiamo la colonna n di C per $c_{n,n}^{-1}$, che è positivo, otteniamo una matrice $D \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ con $d_{1,1} = 1$, e C si deforma in D. Ora aggiungendo opportuni multipli della prima riga alle rimanenti righe otteniamo una matrice $E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ con la proprietà che tutte le entrate su riga n e colonna n sono nulle eccetto per $e_{n,n}$ che è uguale a 1. La matrice D è deformabile in E per l'Esempio 5.12.4. Riassumendo, A è deformabile nella matrice

$$E = \begin{bmatrix} e_{1,1} & \dots & \dots & \dots & e_{1,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & e_{i,j} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_{n-1,1} & \dots & \dots & \dots & e_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice $(n-1) \times (n-1)$ con entrate le $e_{i,j}$ per $i, \in \{1, \dots, n-1\}$ ha determinante uguale a $\mathrm{Det}\, E$, quindi positivo. Per l'ipotesi induttiva E è deformabile in 1_{n-1}, e segue che E è deformabile in 1_n. Questo dimostra che A si deforma in 1_n se l'unica entrata non nulla della prima riga di B (la matrice ottenuta da A al primo paso) non è sull'ultima colonna. Se invece è sull'ultima colonna, prima la scambiamo con la colonna $n-1$ (cambiando segno a un delle due colonne), ottenendo una matrice invertibile che si deforma in B, e ci ritroviamo nel caso già analizzato. Abbiamo dimostrare che due elementi di $\mathrm{GL}^+(V)$ sono deformabili l'uno nell'altro.

Ora supponiamo che $g, h \in (\mathrm{GL}(V) \setminus \mathrm{GL}^+(V))$. Allora $g^{-1} \cdot h \in \mathrm{GL}^+(V)$ (per Binet), e quindi per quanto appena dimostrato esiste un'applicazione continua $\gamma\colon [a, b] \to \mathrm{GL}(V))$ tale che $\gamma(0) = g^{-1} \cdot h$ e $\gamma(1) = \mathrm{Id}_V$. L'applicazione $\varphi\colon [a, b] \to \mathrm{GL}(V)$ definita da $\varphi(t) := g \cdot \gamma(t)$ è continua e si ha $\varphi(0) = h$, $\varphi(1) = g$. $\square$

Esercizi del Capitolo 5

Esercizio 5.1. *Calcolate i determinanti delle seguenti matrici intere quadrate:*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.2. *Calcolate le matrici dei cofattori delle A e B dell'Esercizio 5.1.*

Esercizio 5.3. *Sia $\mathbb{K}$ un campo e $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. Calcolate i determinanti delle seguenti matrici*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Esercizio 5.4. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$. Sia p un numero primo e $\overline{A} \in M_{n,n}(\mathbb{Z}/(p))$ la matrice che si ottiene da A sostituendo all'entrata a_{ij} la classe di equivalenza di a_{ij} in $\mathbb{Z}/(p)$. Dimostrate che se $\operatorname{rg}\overline{A} = r$ allora $\operatorname{Det}(A)$ è divisibile per p^{n-r}.*

Esercizio 5.5. *I numeri 2254, 4746, 5194 e 1792 sono divisibili per 7. Ne* segue *che*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 6 \\ 5 & 1 & 9 & 4 \\ 1 & 7 & 9 & 2 \end{bmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{Z})$$

ha determinante divisibile per 7. Perchè?

Esercizio 5.6. *Per $n \geqslant 1$ sia $A(n) := (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbb{Z})$ con*

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & \text{se } i = j, \\ -1 & \text{se } |i-j| = 1, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{5.12.5}$$

Quindi

$$A(1) = (2), \quad A(2) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad A(3) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

Dimostrate che $\operatorname{Det} A(n) = n + 1$ per ogni n.

Esercizio 5.7. *Siano $A \in M_{5,1}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{1,5}(\mathbb{K})$. Quindi $A \cdot B \in M_{5,5}(\mathbb{K})$. Qual'è il determinante di $A \cdot B$?*

Esercizio 5.8. *Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, e sia B la matrice ottenuta riscrivendo le colonne di A nell'ordine opposto. Quale relazione esiste tra $\operatorname{Det} A$ e $\operatorname{Det} B$?*

Esercizio 5.9. *Per quali n è vero che se $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ allora $(A^c)^c = A$? (Ricordiamo che A^c è la matrice dei cofattori di A.)*

Esercizio 5.10. *Sia $\mathbb{S}$ uno spazio affine di dimensione finita n, e sia $RA(O, \mathcal{B})$ un riferimento cartesiano su $\mathbb{S}$.*

1. *Sia $d \geqslant 1$. Dimostrate che punti $P_0(a_{0,1}, \ldots, a_{0,n}), \ldots, P_d(a_{d,1}, \ldots, a_{d,n}) \in \mathbb{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se la matrice $d \times n$ data da*

$$\begin{bmatrix} (a_{1,1} - a_{0,1}) & \ldots & \ldots & (a_{1,n} - a_{0,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{d,1} - a_{0,1}) & \ldots & \ldots & (a_{d,n} - a_{0,n}) \end{bmatrix}$$

   ha rango massimo cioè d.

2. *Supponiamo che* $P_0(a_{0,1},\dots,a_{0,n}),\dots,P_d(a_{d,1},\dots,a_{d,n}) \in \mathbb{S}$ *siano linearmente indipendenti e sia* $\mathbb{L} \subset \mathbb{S}$ *il sottospazio lineare di dimensione d generato da* $P_0,\dots,P_d$*. Dimostrate che* $P(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{L}$ *se e solo se sono nulli tutti i determinanti dei minori* $(d+1)\times(d+1)$ *della matrice* $(d+1)\times n$ *data da*

$$\begin{bmatrix} (x_1 - a_{0,1}) & \dots & \dots & (x_n - a_{0,n}) \\ (a_{1,1} - a_{0,1}) & \dots & \dots & (a_{1,n} - a_{0,n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (a_{d,1} - a_{0,1}) & \dots & \dots & (a_{d,n} - a_{0,n}) \end{bmatrix}$$

Esercizio 5.11. *Sia* $A \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ *data da*

$$A := \begin{bmatrix} 22 & -12 \\ 35 & -19 \end{bmatrix}$$

Scrivete in forma chiusa (cioè non ricorsiva) A^m *per* $m \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 5.12. *Sia*

$$A(x_1,\dots,x_n) := \begin{bmatrix} 1+x_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+x_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+x_n \end{bmatrix}.$$

Dimostrate che

$$\operatorname{Det} A(x_1,\dots,x_n) = x_1 x_2 \dots x_n + \sum_{i=1}^{n} x_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_i \cdot \ldots \cdot x_n$$

dove $x_1 \cdot \ldots \cdot \widehat{x}_i \cdot \ldots \cdot x_n$ *è il prodotto degli* x_s *con* $s \neq i$.

Esercizio 5.13. *Sia*

$$\Delta_n := \operatorname{Det} \begin{bmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & a_1 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & -1 & a_{n-1} & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & a_n \end{bmatrix}$$

Dimostrate che

$$\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} = a_n + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\dots + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_0}}}}.$$

Esercizio 5.14. *Sia* $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ *data da*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. *Calcolate autovalori e autospazi di A.*
2. *Determinate se A è diagonalizzabile.*

Esercizio 5.15. *Sia* $V \subset \mathbb{R}^4$ *il sottospazio*

$$V = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid (\boldsymbol{e}_1^\vee + \boldsymbol{e}_2^\vee + \boldsymbol{e}_3^\vee + \boldsymbol{e}_4^\vee)(X) = 0\}.$$

Sia $M \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ *definita così:*

$$M := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) *Verificate che*

$$L_M^\vee(\boldsymbol{e}_1^\vee + \boldsymbol{e}_2^\vee + \boldsymbol{e}_3^\vee + \boldsymbol{e}_4^\vee) = 2(\boldsymbol{e}_1^\vee + \boldsymbol{e}_2^\vee + \boldsymbol{e}_3^\vee + \boldsymbol{e}_4^\vee)$$

e ***quindi*** *(perchè ?)* $L_M(V) \subset V$. *Sia*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V \\ X & \mapsto & L_M(X) \end{array} \tag{5.12.6}$$

(b) *Calcolate* $\operatorname{Det} f$, *dove* f *è data da* (5.12.6), *seguendo la definizione di* $\operatorname{Det} f$.

(c) *Notate che* $L_M(1,1,1,1) = (2,2,2,2)$. *Calcolate* $\operatorname{Det} M$ *e usate questo calcolo per (ri)determinare* $\operatorname{Det} f$. *(Suggerimento: pensate di calcolare* $\operatorname{Det} M$ *scegliendo una base il cui primo vettore è* $(1,1,1,1)$ *e gli altri formano una base di....).*

Esercizio 5.16. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo, e siano* $A^1, \ldots, A^{n-1} \subset \mathbb{K}^n$ *vettori linearmente indipendenti, pensati come vettori-riga. Siccome i vettori sono linearmente indipendenti il sottospazio*

$$V := \langle A^1, \ldots, A^{n-1} \rangle \subset \mathbb{K}^n$$

ha codimensione 1 *in* $\mathbb{K}^n$ *e quindi* $\dim \operatorname{Ann}(V) = 1$. *Sia* $A \in M_{n-1,n}(\mathbb{K})$ *la matrice le cui righe sono* $A^1, \ldots, A^{n-1}$. *Dato* $1 \leqslant j \leqslant n$ *sia* $M_j \in M_{n-1,n-1}(\mathbb{K})$ *la matrice ottenuta eliminando la colonna* j*-esima da* A. *Infine sia*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{K} \\ X & \mapsto & \sum_{j=1}^n (-1)^j (\operatorname{Det} M_j) x_j \end{array}$$

Dimostrate che

$$\operatorname{Ann} V = \langle f \rangle.$$

Esercizio 5.17. *Sia* $\mathbb{K}$ *un campo e supponiamo che* $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.

(1) *Sia* n *dispari e supponiamo che* $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *sia* antisimmetrica *cioè che* $A^t = -A$. . *Dimostrate che* $\operatorname{Det} A = 0$.

(2) *per ogni* n *pari date un esempio di* $A \in M_{n,n}(\mathbb{K})$ *antisimmetrica con* $\operatorname{Det} A \neq 0$.