

# Algebra Lineare, a. a. 2023-24

PROF. K. O'GRADY

## Diario delle lezioni

11 gennaio 2024

### Settimana 1.

- (25/9/2023), 2h. Applicazioni tra insiemi. Grafico di un'applicazione. Composizione di applicazioni. Applicazioni inettive, suriettive, biunivoche.
- (27/9/2023) Applicazioni: ripasso. Potenze di un'applicazione. Inversa di un'applicazione biunivoca, e sue potenze con esponente negativo. Relazioni, relazioni di equivalenza.
- (28/9/2023) Classi di equivalenza, quoziente di un insieme modulo una relazione di equivalenza, applicazione quoziente. Classi di congruenza modulo  $n$ . Partizioni e relazioni di equivalenza.

### Settimana 2.

- (2/10/2023) Correzione esercizi.
- (4/10/2023) Definizione di anello. Esempi:  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Z}/(n)$ . Unicità dell'elemento neutro e dell'opposto. Anelli commutativi unitari. Definizione di campo. Esempi di campi finiti.
- (5/10/2023)  $\mathbb{Z}/(n)$  è un campo se e solo se  $n$  è primo (notazione  $\mathbb{F}_p$ ). Calcolo dell'inverso moltiplicativo di un elemento non nullo di  $\mathbb{F}_p$ . Il campo dei numeri complessi. Parte reale, immaginaria, modulo, rappresentazione polare. Rappresentazione geometrica dei numeri complessi, versione geometrica di somma e moltiplicazione.

### Settimana 3.

- (9/10/2023) Correzione esercizi.
- (11/10/2023) Fine correzione esercizi. Definizione di spazio vettoriale. Esempi:  $\mathbb{K}^n$ ,  $V(\mathbb{E}^2)$ . Prime proprietà (unicità dell'elemento neutro, etc.).
- (12/10/2023) Sottospazi vettoriali. Combinazioni lineari. Sottospazio generato da un sottoinsieme. Spazi vettoriali finitamente generati. Ogni sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato è finitamente generato (solo enunciato).

### Settimana 4.

- (16/10/2023) Correzione esercizi.
- (18/10/2023) Dipendenza/indipendenza lineare di vettori. Basi. Estrazione di una base da un sistema di generatori ed estensione di vettori linearmente indipendenti a una base.
- (19/10/2023) Coordinate associate a una base. Teorema: due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità (enunciato). Dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato.

### Settimana 5.

- (23/10/2023) Due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità: dimostrazione. Formula di Grassmann.
- (25/10/2023) Correzione esercizi.

(26/10/2023) Applicazioni lineari. Un'applicazione lineare tra spazi vettoriali fissati è determinata dai suoi valori su una base del dominio, e questi valori possono essere scelti arbitrariamente. Matrici e operazioni tra matrici.

### Settimana 6.

(30/10/2023) L'applicazione lineare  $L_A: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$  associata a una matrice  $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ . Proprietà algebriche delle operazioni tra matrici. Immagine e nucleo di un'applicazione lineare. Relazione tra le dimensioni di nucleo e immagine di un'applicazione lineare.

(2/11/2023) Correzione esercizi. La composizione di applicazioni lineari è lineare. Isomorfismi. Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione.

### Settimana 7.

(6/11/2023 - 2 ore) L'insieme  $\mathcal{L}(V, W)$  delle applicazioni lineari  $V \rightarrow W$  tra spazi vettoriali su uno stesso campo  $\mathbb{K}$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{K}$ . Il duale di uno spazio vettoriale. La matrice  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(f)$  associata a un'applicazione lineare  $f: V \rightarrow W$ , una volta scelte basi  $\mathcal{B}$  di  $V$  e  $\mathcal{C}$  di  $W$ . L'applicazione  $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}: \mathcal{L}(V, W) \rightarrow M_{m,n}(\mathbb{K})$  è un isomorfismo ( $m := \dim W$ ,  $n := \dim V$ ). Prodotto di matrici e composizione di applicazioni lineari.

(8/11/2023) Correzione esercizi.

### Settimana 8.

(13/11/2023) Ancora su prodotto di matrici e composizione di applicazioni lineari. Il rango di un'applicazione lineare. Problema: calcolare il rango. Matrici a scala per colonne e rango di  $L_S$  dove  $S$  è a scala per colonne. Operazioni elementari su liste (finite) di vettori. Algoritmo che permette di calcolare una base di  $\text{im}(L_A)$  (riduzione di una matrice arbitraria a una a scala per colonne attraverso operazioni elementari sulle colonne).

(15/11/2023) Problema: descrivere le fibre di  $f: V \rightarrow W$  lineare o, equivalentemente (per  $V, W$  finitamente generati) le soluzioni di un sistema di equazioni lineari  $A \cdot X = B$ . Soluzioni di  $S \cdot X = B$  per  $S$  matrice a scala per righe. Operazioni elementari sulle righe di una matrice. Eliminazione di Gauss.

(16/11/2023) Il rango di una matrice è uguale la rango della trasposta. Algoritmo per il calcolo dell'inversa di una matrice invertibile. Correzione esercizi.

### Settimana 9.

(20/11/2023) Ancora sull'inversa di una matrice. Il gruppo  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Matrici di cambiamento di base. Endomorfismi e matrici coniugate. Endomorfismi e matrici diagonalizzabili. Autovettori, autovalori, autospazi.

(22/11/2023) Correzione esercizi.

(23/11/2023) Diagonalizzazione: successione di Fibonacci. Somma diretta di spazi vettoriali.

### Settimana 10.

(27/11/2023) Correzione esercizi.

(28/11/23), a. III, 2h. Prima prova di esonero.

(29/11/2023) Il quoziente di uno spazio vettoriale modulo un sottospazio, sua dimensione, proprietà universale. Il determinante di una matrice quadrata: definizione iterativa.

(30/11/2023) Il determinante come funzione delle colonne è multilineare e alternante. Algoritmo per calcolare il determinante riducendo a scala per colonne.

### **Settimana 11.**

(04/12/2023) Lezione cancellata.

(06/12/2023) Correzione esercizi.

(07/12/2023) Ancora sulle proprietà algebriche del determinante. Calcolo degli autovalori di una matrice quadrata.

### **Settimana 12.**

(11/12/2023) Lo spazio vettoriale delle funzioni multilineari alternanti da  $V^n$  a  $\mathbb{K}$ : se  $\dim V < n$  è banale, se  $\dim V = n$  ha dimensione 1. La formula di Binet. Il determinante di un endomorfismo.

(13/12/2023) Correzione esercizi.

(14/12/2023) Teorema degli orlati. Sviluppo di Laplace.  $\text{Det}(A^t) = \text{Det}(A)$ . Formula di Cramer. Segno di permutazioni e determinante.

### **Settimana 13.**

(18/12/2023) Trasposizioni e segno di una permutazione. Determinanti di matrici a entrate in un sottoanello di un campo. Il polinomio caratteristico di un endomorfismo di uno spazio vettoriale finitamente generato. Molteplicità geometrica e algebrica di un autovalore. Condizione necessaria e sufficiente perchè un endomorfismo sia diagonalizzabile.

(20/12/2023) La matrice miliardaria. Correzione esercizi.

(21/12/2023) Lezione cancellata.

### **Settimana 14.**

(8/1/2024), 2h. Correzione esercizi.

(10/01/2024) Seconda prova di esonero.

(11/01/2024), 1h. Correzione prove di esonero.