Algebra Lineare

Prova scritta di esonero A - 10 Gennaio 2024

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	9	
3	9	
4	12	
Totale	39	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $A_t \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A_t := \begin{bmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 1 & t \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinate per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.
2. Per tali valori determinate la matrice inversa A_t^{-1}.

Risoluzione:

(1) A_t è invertibile se e solo se $\operatorname{Det} A_t \neq 0$.

Calcoliamo $\operatorname{Det} A_t$:

Sviluppo di Laplace, 1ª colonna.

$$\operatorname{Det} A_t = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 1 & t \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1-2t & t+2 \\ 0 & 2-3t & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2t & t+2 \\ 2-3t & 4 \end{vmatrix} = 3t^2 - 4t = t \cdot (3t-4).$$

Quindi A_t è invertibile se e solo se $t \notin \{0, \frac{4}{3}\}$.

(2) Sia $t \notin \{0, \frac{4}{3}\}$. Allora $A_t^{-1} = (3t^2-4t)^{-1} \cdot A_t^c$.

Calcoliamo la matrice dei cofattori A_t^c, che è la trasposta della matrice con entrata su riga i e colonna j data da $(-1)^{i+j} \cdot A_t^{ij}$

Troviamo che

$$A_t^{-1} = (3t^2-4t)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1-2t & -t-2 & t^2+1 \\ 3t-2 & 4 & -t-2 \\ 1 & 3t-2 & 1-2t \end{bmatrix}$$

Risposta: A_t è invertibile se $\boxed{t \notin \{0, \frac{4}{3}\}}$ e in questo caso $A_t^{-1} = \boxed{\frac{1}{3t^2-4t} \begin{bmatrix} 1-2t & -t-2 & t^2+1 \\ 3t-2 & 4 & -t-2 \\ 1 & 3t-2 & 1-2t \end{bmatrix}}$

Esercizio 2. Sia $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$B := \begin{bmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{bmatrix}$$

1. Determinate una matrice invertibile $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1} \cdot B \cdot M$ sia diagonale.
2. Date una formula chiusa per B^k, cioè la potenza k-esima della matrice B, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Risoluzione:

(1): Il polinomio caratteristico di M è $\lambda^2+\lambda-2$, quindi gli autovalori di M sono $\lambda=1$ e $\lambda=-2$.

Autovettori associati sono: $\begin{cases} (2,1) & \text{con autovalore } \lambda=1 \\ (3,2) & \text{con autovalore } \lambda=-2 \end{cases}$

La base $\mathcal{C} = \{(2,1), (3,2)\}$ diagonalizza L_B, e si ha

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Base standard di $\mathbb{R}^2$

Quindi $B = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}}(L_B) = \underbrace{M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{S}}(Id)}_{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}} \cdot M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(L_B) \cdot \underbrace{M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{C}}(Id)}_{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}$

Quindi $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, e perciò $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2): $B^k = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3\cdot(-1)^{k+1}\cdot 2^k & -6+6(-1)^k 2^k \\ 2+(-1)^{k+1}\cdot 2^{k+1} & -3+(-1)^k\cdot 2^{k+2} \end{bmatrix}.$

Risposta: $M = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$ $\quad B^k = \boxed{\begin{bmatrix} 4+3\cdot(-1)^{k+1}\cdot 2^k & -6+6(-1)^k 2^k \\ 2+(-1)^{k+1}\cdot 2^{k+1} & -3+(-1)^k\cdot 2^{k+2} \end{bmatrix}}$

Esercizio 3. (a) Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Determinate gli autovalori reali di f, i relativi autospazi e determinate se f è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(b) Sia g l'unico endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ tale che valga (1). Determinate gli autovalori complessi di g, i relativi autospazi e determinate se g è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$).

Risoluzione:

Poniamo $v_1=(1,1,0)$ $\quad v_2=(1,0,1)$ $\quad v_3=(0,1,1)$.

(a): $\mathcal{B}=\{v_1,v_2,v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$, e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Quindi il polinomio caratteristico di f è $p_f=\lambda^3-1$.
L'unica radice reale di p_f è $\lambda=1$, quindi l'unico autovalore reale di f è $\lambda=1$. L'autospazio relativo è $\langle v_1+v_2+v_3\rangle=\langle(1,1,1)\rangle$, e perciò f non è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

(b): Il polinomio caratteristico di g è uguale a quello di f, quindi $p_g=\lambda^3-1$. Le radici complesse di p_g, cioè gli autovalori di g sono $\lambda=1$, $\lambda=\varepsilon:=e^{2\pi i/3}$, $\lambda=\varepsilon^2:=e^{4\pi i/3}$, con autospazi

Autovalori e autospazi di f:	$\lambda=1$ $\quad V_1(f)=\langle(1,1,1)\rangle$	f è diag. (su $\mathbb{R}$)?	NO
Autovalori e autospazi di g:	$\lambda=1$ $\quad \lambda=\varepsilon:=e^{2\pi i/3}$ $\quad \lambda=\varepsilon^2=e^{4\pi i/3}$ $V_1(g)$ $\quad V_\varepsilon(g)=\langle(\varepsilon,\varepsilon^2,1)\rangle$ $V_{\varepsilon^2}(g)=\langle(\varepsilon^2,\varepsilon,1)\rangle$	g è diag. (su $\mathbb{C}$)?	SÌ

associati dati da

$$V_1(g) = \langle v_1 + v_2 + v_3 \rangle = \langle (1,1,1) \rangle$$

$$V_\varepsilon(g) = \langle v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \varepsilon v_3 \rangle = \langle (\varepsilon, \varepsilon^2, 1) \rangle$$

$$V_{\varepsilon^2}(g) = \langle v_1 + \varepsilon v_2 + \varepsilon^2 v_3 \rangle = \langle (\varepsilon^2, \varepsilon, 1) \rangle$$

Esercizio 4. Sia $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$C := \begin{bmatrix} 3 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ -5 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

1. Mostrate che $L_C(U) \subset U$, dove $L_C \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è dato da $L_C(X) := C \cdot X$.
2. Sia $h \colon U \to U$ l'endomorfismo di U definito ponendo $h(X) := L_C(X)$ (ha senso per il punto 1). Determinate autovalori e relativi autospazi di h e determinate se h è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(1): Sia $\mathbb{R}^4 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(X) := x_1 + x_2 + x_3 + x_4.$$

Quindi $U = \ker\varphi$, e perciò per dimostrare che $L_C(U) \subset U$ è sufficiente dimostrare che

$$\varphi \circ L_C = -4\varphi. \qquad (*)$$

Un facile conto mostra che vale (*).

(2): Sia $v := (1,1,1,1)$. Allora

$$v \notin U \quad \text{e} \quad L_C(v) = -4v. \qquad (*)$$

Se $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di U, allora $\mathcal{B} = \{v, u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e abbiamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_C) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{M_{\mathcal{C}}(h)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Autovalori e autospazi di h: $\lambda = 4 \quad V_4(h) = \langle (1,1,-1,-1) \rangle$

h è diag. (su $\mathbb{R}$)? NO

Segue che

$$P_c = (\lambda+4)\cdot P_h \qquad (\#)$$

Il polinomio caratteristico P_c si calcola (con un po' di fatica), e si ottiene che

$$P_c = (\lambda+4)\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda^2-8\lambda+32).$$

Per $(\#)$ otteniamo che

$$P_h = (\lambda-4)\cdot(\lambda^2-8\lambda+32).$$

Siccome il polinomio $\lambda^2-8\lambda+32$ non ha radici reali segue che $\lambda=4$ è l'unico autovalore reale di h.

Calcolando si ottiene che

$$V_4(h) = \langle (1,1,-1,-1) \rangle$$

Quindi h non è ~~diagonalizzabile~~ diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).