Algebra Lineare

Prova scritta di esonero B - 10 Gennaio 2024

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	9	
2	9	
3	9	
4	12	
Totale	39	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Per $t \in \mathbb{R}$ sia $A_t \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$A_t := \begin{bmatrix} t & -2 & 1 \\ 3 & t & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Determinate per quali valori di t la matrice A_t è invertibile.
2. Per tali valori determinate la matrice inversa A_t^{-1}.

Risoluzione:

(1): A_t è invertibile se e solo se $\mathrm{Det}\, A_t \neq 0$.

Si ha $\mathrm{Det}\, A_t = t^2 - 14t + 13 = (t-1)(t-13)$, quindi A_t è invertibile se $t \notin \{1, 13\}$

(2): Sia $t \notin \{1, 13\}$. Allora $A_t^{-1} = (t-1)(t-13)^{-1} \cdot A_t^c$.

La matrice dei cofattori è data da

$$A_t^c = \begin{bmatrix} t-12 & -1 & 8-t \\ -11 & t-2 & 4t+3 \\ -2t-9 & 3t-4 & t^2+6 \end{bmatrix}$$

e quindi

$$A_t^{-1} = (t^2-14t+13)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t-12 & -1 & 8-t \\ -11 & t-2 & 4t+3 \\ -2t-9 & 3t-4 & t^2+6 \end{bmatrix}$$

Risposta: A_t è invertibile se $\boxed{t \notin \{1, 13\}}$ e in questo caso $A_t^{-1} = \boxed{(t^2-14t+13)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} t-12 & -1 & 8-t \\ -11 & t-2 & 4t+3 \\ -2t-9 & 3t-4 & t^2+6 \end{bmatrix}}$

Esercizio 2. Sia $B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$B := \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

1. Determinate una matrice invertibile $M \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tale che $M^{-1} \cdot B \cdot M$ sia diagonale.
2. Date una formula chiusa per B^k, cioè la potenza k-esima della matrice B, per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Risoluzione:

(1): Il polinomio caratteristico di B è

$$P_B = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)\cdot(\lambda-3),$$

quindi gli autovalori di M sono $\lambda=2$ e $\lambda=3$.

Gli autospazi di M sono

$$V_2(M) = \langle (4,5) \rangle \qquad V_3(M) = \langle (1,1) \rangle$$

Quindi, se $\mathcal{B}$ è la base di $\mathbb{R}^2$ data da $\mathcal{B} = \{(4,5),(1,1)\}$ si ha che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_M) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Se $\mathcal{S}$ è la base standard di $\mathbb{R}^2$, abbiamo che

$$B = M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{S}}(L_M) = \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{S}}(Id)}_{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_M)}_{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}} \cdot \underbrace{M^{\mathcal{S}}_{\mathcal{B}}(Id)}_{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1}} \qquad (*)$$

Risposta: $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B^k = \begin{bmatrix} 5\cdot 3^k - 2^{k+2} & 2^{k+2} - 4\cdot 3^k \\ 5\cdot 3^k - 5\cdot 2^k & 5\cdot 2^k - 4\cdot 3^k \end{bmatrix}$

Quindi $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot B \cdot \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, cioè

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

(2): Siccome $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, segue che da $(*)$ che

$$B^k = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 3^k - 2^{k+2} & 2^{k+2} - 4 \cdot 3^k \\ 5 \cdot 3^k - 5 \cdot 2^k & 5 \cdot 2^k - 4 \cdot 3^k \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. (a) Sia f l'unico endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Determinate gli autovalori reali di f, i relativi autospazi e determinate se f è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(b) Sia g l'unico endomorfismo di $\mathbb{C}^3$ tale che valga (1). Determinate gli autovalori complessi di g, i relativi autospazi e determinate se g è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$).

Risoluzione:

(a): Siano $v_1 := (1,1,0)$ $v_2 := (0,1,1)$ $v_3 := (1,0,1)$. Allora $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi $P_f = (\lambda-1)\cdot(\lambda^2+1)$, e l'unico autovalore reale di f è $\lambda=1$, con autospazio $V_1(f) = \langle (1,1,0) \rangle$.

Segue che f non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(b) $P_g = (\lambda-1)\cdot(\lambda^2+1)$, gli autovalori complessi di g sono

$\lambda=1$, $\lambda=i$, $\lambda=-i$.

Autovalori e autospazi di f:	$\lambda=1$ $V_1(f) = \langle (1,0,1) \rangle$.	f è diag. (su $\mathbb{R}$)?	NO
Autovalori e autospazi di g:	$\lambda=1$ $\lambda=i$ $\lambda=-i$ $V_1(g) = \langle v_3 \rangle$ $V_i(g) = \langle v_1 - i v_2 \rangle$ $V_{-i}(g) = \langle v_1 + i v_2 \rangle$.	g è diag. (su $\mathbb{C}$)?	SÌ

Gli autospazi associati sono

$$V_1(g) = \langle v_3 \rangle = \langle (1,0,1) \rangle$$

$$V_i(g) = \langle v_1 - i v_2 \rangle = \langle (1, 1-i, -i) \rangle$$

$$V_{-i}(g) = \langle v_1 + i v_2 \rangle = \langle (1, 1+i, i) \rangle .$$

e g è diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$).

Esercizio 4. Sia $C \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ la matrice data da

$$C := \cancel{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -5 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

e sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale dato da

$$U := \{X \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

1. Mostrate che $L_C(U) \subset U$, dove $L_C \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ è dato da $L_C(X) := C \cdot X$.
2. Sia $h \colon U \to U$ l'endomorfismo di U definito ponendo $h(X) := L_C(X)$ (ha senso per il punto 1). Determinate autovalori e relativi autospazi di h e determinate se h è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).

(1): Sia $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ l'applicazione lineare definita da

$$\varphi(X) = x_1 - x_2 + x_3 - x_4.$$

Allora $U = \ker\varphi$, quindi è sufficiente dimostrare che

$$\varphi \circ L_C = -4\varphi. \qquad (*)$$

L'uguaglianza in $(*)$ segue da un semplice conto.

(2). Sia $v := (1,-1,1,-1)$. Allora

$$v \notin U \quad \text{e} \quad L_C(v) = -4v. \qquad (*)$$

Se $\mathcal{C} = \{u_1, u_2, u_3\}$ è una base di U, allora $\mathcal{B} = \{v, u_1, u_2, u_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^4$ e abbiamo che

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(L_C) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \boxed{M_{\mathcal{C}}(h)} & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Autovalori e autospazi di h: $\boxed{\lambda = 4 \quad V_4(h) = \langle (1,-1,-1,1) \rangle}$ h è diag. (su $\mathbb{R}$)? $\boxed{\text{NO}}$

Segue che

$$P_c = (\lambda+4)\cdot P_h \qquad (\#)$$

Il polinomio caratteristico P_c si calcola (con un po' di fatica), e si ottiene che

$$P_c = (\lambda+4)\cdot(\lambda-4)\cdot(\lambda^2-8\lambda+32).$$

Per $(\#)$ otteniamo che

$$P_h = (\lambda-4)\cdot(\lambda^2-8\lambda+32).$$

Siccome il polinomio $\lambda^2-8\lambda+32$ non ha radici reali segue che $\lambda=4$ è l'unico autovalore reale di h.

Calcolando si ottiene che

$$V_4(h) = \langle (1,-1,-1,1) \rangle$$

Quindi h non è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$).