Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Gli archetipi e la definizione

Siano $\mathbb{K}$ un campo e $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ elementi di $\mathbb{K}^n$: definiamo la *somma* $X + Y$ come l'elemento di $\mathbb{K}^n$ dato da

$$X + Y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n). \tag{2.1.1}$$

Quindi abbiamo un'operazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (X, Y) & \mapsto & X + Y \end{array} \tag{2.1.2}$$

Si definisce anche la moltiplicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ (\lambda, X) & \mapsto & \lambda X := (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) \end{array} \tag{2.1.3}$$

Si usa chiamare λ uno *scalare* e quella definita è la moltiplicazione per scalari. Uno spazio vettoriale è un insieme V, fornito di due operazioni, la somma $V \times V \to V$, e il prodotto per scalari $\mathbb{K} \times V \to V$, che hanno caratteristiche simili a quelle della somma e prodotto per scalari di $\mathbb{K}^n$.

Definizione 2.1.1. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Uno *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ è un insieme V provvisto di due operazioni, la "somma"

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (v_1, v_2) & \mapsto & v_1 + v_2 \end{array} \tag{2.1.4}$$

e la "moltiplicazione per scalare"

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array} \tag{2.1.5}$$

tali che valgano le seguenti proprietà:

1. Esiste $0 \in V$ tale che $0 + v = v$ per ogni $v \in V$.
2. Dato $v \in V$ esiste $w \in V$ tale che $v + w = 0$, dove 0 è come al punto 1.
3. Se $u, v, w \in V$, allora $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. Se $v, w \in V$, allora $v + w = w + v$.
5. $1v = v$ per ogni $v \in V$,
6. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$ per ogni $v \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ (proprietà distributiva del prodotto),
7. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$ per ogni $v, w \in V$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ (proprietà distributiva della somma),

8. $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$ per ogni $v \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

Gli elementi di uno spazio vettoriale si chiamano *vettori*, gli elementi del campo $\mathbb{K}$ gli *scalari*.

Osservazione 2.1.2. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Si denota con lo stesso simbolo 0 sia l'elemento neutro del campo $\mathbb{K}$, sia un elemento (vedremo che è unico) dello spazio vettoriale per cui valgano (1) e (2) della Definizione 2.1.1: attenzione a non fare confusione!

Esempio 2.1.3. Sia $V = \mathbb{K}^n$. Si verifica facilmente che le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari definite da (2.1.2) e (2.1.3) rispettivamente godono delle proprietà della Definizione 2.1.1, con elemento neutro $0 := (0, 0, \ldots, 0)$. Quindi $\mathbb{K}^n$ provvisto delle operazioni appena definite è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Osservazione 2.1.4. Valgono le proprietà da 1 a 4 della Definizione 2.1.1 se e solo se V provvisto della somma è un gruppo abeliano.

Terminologia 2.1.5. Si dice informalmente che un insieme V *è uno spazio vettoriale* sottintendendo che sono definite operazioni di somma e moltiplicazione per scalare che godono delle proprietà elencate nella Definizione 2.1.1. Gli elementi di V si dicono *vettori*.

Terminologia 2.1.6. Uno spazio vettoriale *reale* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, uno spazio vettoriale *complesso* è uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$.

Esempio 2.1.7. Sia $\mathbb{E}^2$ il piano della geometria euclidea (studiato a scuola). Siano $A \neq B \in \mathbb{E}^2$: denoteremo con $\overline{AB}$ l'unica retta contenente A e B. Ricordiamo che due rette sono *parallele* se hanno intersezione vuota oppure coincidono: se $A, B, C, D \in \mathbb{E}^2$ il simbolo $\overline{AB}||\overline{CD}$ significa che o $A \neq B$, $C \neq D$ e le rette AB, CD sono parallele oppure $A = B$ o $C = D$ ($A = B$ e $C = D$ ammesso).

Un *segmento orientato* in $\mathbb{E}^2$ è una coppia ordinata (A, B) di punti di $\mathbb{E}^2$: lo indichiamo con AB - l'estremo iniziale è A, quello finale è B (quindi $AB = CD$ se e solo se $A = C$ e $B = D$). I segmenti orientati AB e CD di $\mathbb{E}^2$ sono *equipollenti* se $\overline{AB}||\overline{CD}$ *e* $\overline{AC}||\overline{BD}$. Si verifica che la relazione di equipollenza è di equivalenza (esercizio); la denotiamo $\sim$.

Un *vettore geometrico* (nel piano) è una classe di equipollenza di segmenti orientati: quindi il quoziente

$$\mathsf{V}(\mathbb{E}^2) := (\mathbb{E}^2 \times \mathbb{E}^2)/\sim \tag{2.1.6}$$

è l'insieme dei vettori geometrici. La classe di equipollenza di AB si denota $\overrightarrow{AB}$. Notiamo che dato $P \in \mathbb{E}^2$ e un vettore geometrico v esiste uno e un solo $Q \in \mathbb{E}^2$ tale che $\overrightarrow{PQ} = v$.

Si dà all'insieme $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ la struttura di spazio vettoriale nel seguente modo. Prima definiamo la somma di segmenti orientati AB e BC (cioè tali che l'estremo finale del primo è l'estremo iniziale del secondo) come il segmenti orientato AC; quindi $AB + BC := AC$. Ora siano $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ due classi di equipollenza di segmenti orientati. Sia AB un segmento orientato che rappresenta v e sia $C \in \mathbb{E}^2$ l'unico punto tale che BC rappresenti w: quindi ha senso $AB + BC = AC$. Si dimostra che se abbiamo punti $A', B', C' \in \mathbb{E}^2$ tali che $\overrightarrow{A'B'} = v$ e $\overrightarrow{B'C'} = w$ allora $A'B' + B'C' = A'C'$ è equipollente ad AC cioè $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$. Quindi possiamo definire la somma $v + w$ come la classe di equipollenza di $AB + BC = AC$: questo definisce la somma di vettori geometrici

$$\begin{array}{ccc} \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \times \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) & \longrightarrow & \mathsf{V}(\mathbb{E}^2) \\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} & \mapsto & \overrightarrow{AC} \end{array}$$

La moltiplicazione per scalari si definisce in modo simile. Sia $v \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$. Supponiamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ sia non-negativo. Sia AB un segmento orientato tale che $\overrightarrow{AB} = v$. Sia r una **semiretta** con estremo A e contenente B. Sia $C \in r$ il punto tale che la distanza da A a C sia la distanza da A a B moltiplicata per λ: si dimostra che la classe di equipollenza di AC non dipende dalla scelta del rappresentante di v e quindi possiamo definire λv come la classe di equipollenza di AC. Per definire λv quando $\lambda < 0$ definiamo l'*opposto* di un vettore geometrico v così: sia AB un rappresentante di v, allora la classe di equipollenza di BA non dipende dalla scelta del rappresentante e quindi ha senso definire $-v := \overrightarrow{BA}$.

Dato $v \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ negativo definiamo $\lambda v := (-\lambda)v$ - questo ha senso perchè siccome $-\lambda > 0$ il vettore $(-\lambda)v$ è stato definito in precedenza. Ora definiamo il vettore nullo $0 \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ come la classe di equipollenza di AA.

Si verifica che $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ con le operazioni appena definite è uno spazio vettoriale reale.

Esempio 2.1.8. Siccome $\mathbb{R}$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$ possiamo dare a $\mathbb{C}$ la struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Esempio 2.1.9. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sull'insieme dei polinomi $\mathbb{K}[x]$ sono definite le operazioni di somma e prodotto di polinomi. Siccome $\mathbb{K} \subset \mathbb{K}[x]$ (i polinomi "costanti"), possiamo definire un prodotto scalare $\mathbb{K} \times \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$. Con queste operazioni $\mathbb{K}[x]$ è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Esempio 2.1.10. Siano $\mathbb{K}$ un campo e X un insieme. Possiamo dotare l'insieme $\mathbb{K}^X$ delle funzioni $f\colon X \to \mathbb{K}$ della struttura di un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale definendo la somma di funzioni punto per punto e analogamente il prodotto per uno scalare:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda f(x).$$

L'elemento neutro è la funzione identicamente nulla.

Osservazione 2.1.11. Scegliamo una unità di misura nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$. Allora, dato un vettore v nel piano euclideo $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$, ha senso considerare la lunghezza di un qualsiasi rappresentante $\overrightarrow{AB}$ di v, e siccome tale lunghezza è indipendente dal rappresentante, ha senso parlare di lunghezza di v: si chiama la *norma* di v e si denota $||v||$. Di più: possiamo definire il prodotto scalare (v, w) di due vettori $v, w \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$, procedendo come fatto a scuola. Analogamente si può definire un prodotto scalare tra vettori di $\mathbb{R}^n$. Nella definizione di spazio vettoriale, dimentichiamo tutte queste strutture, benchè siano interessanti. Il punto è che per ora concentriamo la nostra attenzione su quello che si può dedurre dal solo fatto che siano definite le operazioni di somma di vettori e prodotto per uno scalare. In questo modo si dimostrano risultati che valgono in moltissimi contesti diversi. Più in là vedremo il prodotto scalare come una struttura aggiuntiva che uno spazio vettoriale può avere, e dimostreremo risultati sui prodotti scalari (e anche altre strutture aggiuntive). Questo modo di procedere non è naturale, ma economico e redditizio.

2.2 Prime proprietà

Proposizione 2.2.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$.*

1. *Esiste un unico elemento neutro, cioè se $0_1, 0_2 \in V$ sono tali che*

$$0_1 + v = v, \qquad 0_2 + v = v \quad \forall v \in V \tag{2.2.1}$$

   allora $0_1 = 0_2$.

2. *Dato $v \in V$ esiste un unico $w \in V$ tale che $v + w = 0$.*

3. *$0v = 0$ (lo "0" a sinistra è l'elemento neutro di $\mathbb{K}$,*

Dimostrazione. La dimostrazione è del tutto simile alla dimostrazione dell'unicità dell'elemnto neutro di un anello, e dell'opposto di un elemento di un anello. Ripetiamola velocemente. Abbiamo

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_1, \tag{2.2.2}$$

e questo dimostra (1). Per dimostrare (2) supponiamo che $v + w_1 = 0$ e $v + w_2 = 0$. Abbiamo

$$w_1 = w_1 + 0 = w_1 + (v + w_2) = (w_1 + v) + w_2 = 0 + w_2 = w_2, \tag{2.2.3}$$

e questo dimostra (2). □

Terminologia 2.2.2. Per la Proposizione 2.2.1 ha senso parlare de*ll*'elemento neutro di $0 \in V$, e, dato $v \in V$, de*ll*'unico $w \in V$ tale che $v + w = 0$, che sarà denotato $-v$ (è l'*opposto* di v).

Proposizione 2.2.3. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Allora*

(a) $0v = 0$ *per ogni* $v \in V$,

(b) $\lambda 0 = 0$ *per ogni* $\lambda \in \mathbb{K}$,

(c) $(-1)v + v = 0$ *per ogni* $v \in V$.

Dimostrazione. (a): Si ha $0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$ e aggiungendo l'opposto di $0v$ a entrambi i membri otteniamo che $0 = 0v$. (b): la dimostrazione di è del tutto simile. (c): $(-1)v + v = (-1)v + 1v = (-1 + 1)v = 0v = 0$ dà che $(-1)v + v = 0$. Quindi $(-1)v = -v$. □

2.3 Sottospazi

Definizione 2.3.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme W di V è un *sottospazio* di V se è non vuoto e valgono le seguenti proprietà:

(a) dati $v_1, v_2 \in W$, la somma $(v_1 + v_2)$ è in W,

(b) dati $v \in W$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, il prodotto scalare λv è in W.

Osservazione 2.3.2. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e sia $W \subset V$ un sottospazio. Allora $0 \in W$ e, se $w \in W$, l'opposto $-w$ è un elemento di W. Infatti, siccome W non è vuoto, esiste $w_1 \in W$, quindi $0w_1 \in W$ per (b) della Definizione 2.3.1, ma $0w_1 = 0$ per la Proposizione 2.2.3. Questo dimostra che $0 \in W$. Siccome l'opposto $-w$ è uguale a $(-1)w$, è un elemento di W per (b) della Definizione 2.3.1.

La somma di V e il prodotto per scalare di V definiscono operazioni

$$\begin{array}{ccccccc} W \times W & \longrightarrow & W & \mathbb{K} \times W & \longrightarrow & W \\ (w_1, w_2) & \mapsto & w_1 + w_2 & (\lambda, w) & \mapsto & \lambda w \end{array} \tag{2.3.1}$$

Con queste operazioni W è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con elemento neutro l'elemento neutro di V.

Esempio 2.3.3. Siano $\mathbb{K}$ un campo e $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Siano

$$U := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0\}, \tag{2.3.2}$$
$$W := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 1\}. \tag{2.3.3}$$

Verifichiamo che U è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ e che W non lo è. Innanzitutto U non è vuoto perchè $(0, \ldots, 0) \in U$. Se $X = (x_1, \ldots, x_n)$ e $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ sono vettori di U, allora $X + Y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, e

$$a_1(x_1 + y_1) + \ldots + a_n(x_n + y_2) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n + a_1 y_1 + \ldots + a_n y_n = 0 + 0 = 0.$$

Questo dimostra che vale (a) della Definizione 2.3.1. Inoltre, se $\lambda \in \mathbb{K}$ allora

$$a_1(\lambda x_1) + \ldots + a_n(\lambda x_n) = \lambda(a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n) = \lambda \cdot 0 = 0,$$

e questo dimostra che vale (b) della Definizione 2.3.1.

Per dimostrare che W non è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$, osserviamo che $0 = (0, \ldots, 0)$ non è un elemento di W, e quindi W non è un sottospazio di $\mathbb{K}^n$ per l'Osservazione 2.3.2.

Esempio 2.3.4. L'insieme dei polinomi $\mathbb{R}[x]$, identificato con l'insieme delle funzioni polinomiali da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, è un sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ con addizione e moltiplicazione per scalari puntuali.

Esempio 2.3.5. Siano $\mathbb{K}$ un campo, e $d \in \mathbb{N}$. Sia $\mathbb{K}[x]_{\leqslant d} \subset \mathbb{K}[x]$ definito da

$$\mathbb{K}[x]_{\leqslant d} := \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d \mid a_0, a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{K}\}. \tag{2.3.4}$$

$\mathbb{K}[x]_{\leqslant d}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$.

Esempio 2.3.6. I sottospazi $W \subset \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ sono i seguenti:

(I) $W = \{0\}$,

(II) il sottospazio W_r dei vettori $\overline{PQ}$ paralleli a una retta fissata r, dove $\overline{PQ}$ parallelo a r significa che $P = Q$ oppure chee $P \neq Q$ è la retta per P e Q è parallela a r,

(III) $W = \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$.

Infatti sia $W \subset \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ un sottospazio. Sappiamo che $0 \in W$ per l'Osservazione 2.3.2. Se 0 è l'unico elemento di W, allora vale (I). Ora supponiamo che esista $0 \neq v \in W$. Quindi $v = \overrightarrow{OP}$ per opportuni $O, P \in \mathbb{E}^2$. Sia r la retta per O e P. Allora W contiene il sottospazio W_r dei vettori paralleli a r. Se $W = W_r$ allora vale (II). Infine supponiamo che $W \supsetneq W_r$. Sia $w \in (W \backslash W_r)$. Esiste (un unico) $Q \in \mathbb{E}^2$ tale che $w = \overrightarrow{OQ}$. La retta s per O e Q non è parallela a r perchè $\overrightarrow{OQ}$ non è in W_r. Dimostriamo che $W = \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$. Sia $u \in \mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$, e sia $R \in \mathbb{E}^2$ l'unico punto tale che $u = \overrightarrow{OR}$. Siano r' la retta per R parallela a r e s' la retta per R parallela a s. Quindi r' non è parallela a s, e analogamente s' non è parallela a r. Quindi l'intersezione $r' \cap s$ consiste di un singolo punto Q', e l'intersezione $s' \cap r$ consiste di un singolo punto P'. Si ha

$$u = \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OQ'},$$

e siccome esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $\overrightarrow{OP'} = \lambda v$ e $\overrightarrow{OQ'} = \mu w$ segue che $u \in W$.

Proposizione 2.3.7. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e W_i per $i \in I$ (I è un insieme di indici) una famiglia di sottospazi vettoriali di V. L'intersezione $\bigcap_{i \in I} W_i$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Siccome $0 \in W_i$ per ogni $i \in I$ abbiamo che $0 \in \bigcap_{i \in I} W_i$ e quindi $\bigcap_{i \in I} W_i$ non è vuoto. Siano $v_1, v_2 \in \bigcap_{i \in I} W_i$ cioè $v_1, v_2 \in W_i$ per ogni $i \in I$, e sia $\lambda \in \mathbb{K}$. Siccome W_i è un sottospazio vettoriale di V abbiamo che $(v_1 + v_2) \in W_i$ e $\lambda v_1 \in W_i$ per ogni $i \in I$ e quindi $(v_1 + v_2) \in \bigcap_{i \in I} W_i$ e $\lambda v_1 \in \bigcap_{i \in I} W_i$. □

Esempio 2.3.8. Applichiamo la Proposizione 2.3.7 all'insieme delle soluzioni di un sistema di *equazioni lineari omogenee* cioè l'insieme degli $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & 0, \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n & = & 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & = & 0, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \tag{2.3.5}$$

Siccome le soluzioni di una singola equazione

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ l'insieme delle soluzioni di m equazioni è l'intersezione di m sottospazi vettoriali di $\mathbb{K}^n$; per la Proposizione 2.3.7 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

2.4 Combinazioni lineari

Definizione 2.4.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$. Un vettore $v \in V$ è *combinazione lineare* di $v_1, \ldots, v_n$ se esistono $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n. \tag{2.4.1}$$

È conveniente ammettere che n possa essere 0 cioè la collezione di vettori sia vuota: dichiariamo che solo 0 è combinazione lineare di una collezione vuota di vettori.

Esempio 2.4.2. Sia $\mathbb{K}$ un campo, e siano $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{K}^n$ definiti da

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n := (0, 0, \ldots, 1). \tag{2.4.2}$$

Ogni $v \in \mathbb{K}^n$ è combinazione lineare di $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Infatti

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 : +x_2\mathbf{e}_2 : + \ldots + x_n\mathbf{e}_n. \tag{2.4.3}$$

Esempio 2.4.3. Sia $\mathbb{K}$ un campo, e sia $v = (1, 1, 1) \in \mathbb{K}^3$. Allora v non è combinazione lineare di e_1, e_2 (definiti come nell'Esempio 2.4.2). Infatti ogni combinazione lineare di e_1, e_2 ha l'ultima entrata uguale a 0.

Lemma 2.4.4. *Siano $\mathbb{K}$ un campo e V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme $W \subset V$ è un sottospazio se e solo se contiene le combinazioni lineari di qualsiasi lista di suoi vettori.*

Dimostrazione. Supponiamo che $W \subset V$ sia un sottospazio. Siano $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Per (b) della Definizione 2.3.1 si ha che $\lambda_i v_i$ è in W per $i \in \{1, \ldots, n\}$, e quindi $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$ è in W per (a) della Definizione 2.3.1. Ora supponiamo che $W \subset V$ sia un sottoinsieme tale che le combinazioni lineari di qualsiasi sua lista di vettori siano in W. Siccome 0 è combinazione lineare della lista vuota che è una lista di vettori in W, segue che $0 \in W$ e quindi W non è vuoto. Se $v_1, v_2 \in W$ allora $(1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2) \in W$, cioè vale (a) della Definizione 2.3.1 e, analogamente, vale (b) della Definizione 2.3.1. □

Proposizione 2.4.5. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $S \subset V$ un sottoinsieme. Poniamo*

$$\langle S \rangle = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \mid v_1, v_2, \ldots, v_n \in S, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}. \tag{2.4.4}$$

Allora

1. *$\langle S \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V che contiene S, e*

2. *se W è un sottospazio vettoriale di V che contiene S allora $\langle S \rangle \subset W$.*

(Informalmente $\langle S \rangle$ è il più piccolo *sottospazio vettoriale di V che contiene S).*

Dimostrazione. Siccome $0 \in \langle S \rangle$ (vedi l'ultima frase della Definizione 2.4.1) $\langle S \rangle$ non è vuoto. Se $a, b \in \langle S \rangle$, cioè

$$a = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i, \quad b = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j, \qquad v_i, w_j \in S,\ \lambda_i, \mu_j \in \mathbb{K}$$

allora $a + b = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$, e quindi $(a + b) \in \langle S \rangle$. Inoltre, se $\theta \in \mathbb{K}$ abbiamo che $\theta a = \sum_{i=1}^{n} (\theta\lambda_i) v_i$, e quindi $\theta a \in \langle S \rangle$. Questo dimostra che $\langle S \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V. Se $v \in S$, allora $v = 1 \cdot v$, e quindi $v \in \langle S \rangle$. Questo dimostra che vale (1).

Se $W \subset V$ è un sottospazio che contiene S, allora $\langle S \rangle$ è contenuto in W per il Lemma 2.4.4, quindi vale (2). □

Terminologia 2.4.6. Sia V uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Sia $S \subset V$ un sottoinsieme. Il sottospazio $\langle S \rangle$ della Proposizione 2.4.5 è il sottospazio vettoriale *generato da S*, e si denota anche $\mathrm{Span}(S)$. Se $v_1, \ldots, v_n \in V$ omettiamo le parentesi graffe:

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle \{v_1, \ldots, v_n\} \rangle = \mathrm{Span}(v_1, \ldots, v_n).$$

Definizione 2.4.7. Sia V uno spazio vettoriale e $U, W \subset V$ sottospazi. La *somma* $U + W$ è il sottospazio di V definito da

$$U + W := \langle U \cup W \rangle = \{u + w \mid u \in U, \quad w \in W\}. \tag{2.4.5}$$

(Notate che in generale l'unione $U \cup W$ **non** è un sottospazio.)

Definizione 2.4.8. Uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è *finitamente generato* se è generato da un insieme finito. Un sottospazio di uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ è *finitamente generato* se è finitamente generato come spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ (vedi l'Osservazione 2.3.2).

Esempio 2.4.9. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato su $\mathbb{K}$ perchè è generato dai vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ (vedi l'Osservazione 2.4.2).

Esempio 2.4.10. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora lo spazio vettoriale (su $\mathbb{K}$) $\mathbb{K}[x]$ *non* è finitamente generato. Infatti, siano $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{K}[x]$, e dimostriamo che $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle \neq \mathbb{K}[x]$. Possiamo assumere che i polinomi $f_1, \ldots, f_m$ siano tutti non nulli perchè il sottospazio generato non cambia se scartiamo eventuali polinomi nulli. Ogni $f \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ non nullo ha grado al più uguale al massimo dei gradi degli f_j e quindi $\langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ non è tutto $\mathbb{K}[x]$ perchè esistono polinomi di grado arbitrariamente alto.

Esempio 2.4.11. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Allora $\mathbb{K}[x]_{\leqslant d}$ è un sottospazio finitamente generato di $\mathbb{K}[x]$, perchè è generato da $\{1, x, \ldots, x^d\}$.

Proposizione 2.4.12. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato. Ogni sottospazio vettoriale di V è finitamente generato su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Sia P_n l'affermazione: *Se V ha n generatori e $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale allora W è generato da un insieme con al più n elementi.*

Dimostriamo per induzione che P_n è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se V ha 0 generatori allora $V = \{0\}$ (per convenzione il sottospazio generato dall'insieme vuoto è $\{0\}$) e quindi $\{0\}$ è l'unico sottospazio di V: segue che P_0 è vera. Se non vi piace il caso $n = 0$ potete verificare che vale P_1: in questo caso esiste $v \in V$ tale che $V = \langle v \rangle$. Se $W = \{0\}$ allora W è generato da un insieme con 0 elementi, se $W \neq \{0\}$ esiste $av \in W$ dove $a \neq 0$, quindi $v = a^{-1}(av) \in W$ e perciò $W = V = \langle v \rangle$ e quindi W è generato dall'insieme $\{v\}$ che un elemento.

Ora dimostriamo il passo induttivo cioè supponiamo che valga P_n e dimostriamo che vale P_{n+1}. Siano $v_1, \ldots, v_{n+1}$ generatori di V cioè $V = \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle$. Sia

$$U := \langle v_1, \ldots, v_n \rangle.$$

L'intersezione $W \cap U$ è un sottospazio vettoriale di V per la Proposizione 2.3.7 e quindi è un sottospazio vettoriale di U. Siccome U è generato da n vettori e siccome per ipotesi induttiva vale P_n segue che esistono $w_1, \ldots, w_k \in W \cap U$ con $k \leqslant n$ e tali che $W \cap U = \langle w_1, \ldots, w_k \rangle$. Se $W \subset U$ allora $W \cap U = W$ e abbiamo fatto. Rimane da esaminare il caso in cui $W \not\subset U$. Dunque esiste $\widehat{w} \in (W \backslash U)$. Per ipotesi esistono $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\widehat{w} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{n+1} v_{n+1},$$

e siccome $w \notin U$ abbiamo che $a_{n+1} \neq 0$. Anche il vettore $\overline{w} := a_{n+1}^{-1} \widehat{w}$ appartiene a W, e abbiamo

$$\overline{w} = b_1 v_1 + b_2 v_2 + \ldots + b_n v_n + v_{n+1}.$$

Dimostriamo che

$$W = \langle w_1, w_2, \ldots, w_k, \overline{w} \rangle. \tag{2.4.6}$$

Sia $w \in W$. Per ipotesi esistono $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{K}$ tali che $w = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_{n+1} v_{n+1}$. Il vettore

$$w - x_{n+1}\overline{w} = (x_1 - b_1 x_{n+1})v_1 + (x_2 - b_2 x_{n+1})v_2 + \ldots + \ldots (x_n - b_n x_{n+1})v_n \tag{2.4.7}$$

è in $W \cap U$. Infatti è in W perchè è combinazione lineare dei vettori w e $\overline{w}$, che appartengono al sottospazio W, e l'espressione a destra di (2.4.7) dimostra che è in U. Quindi esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$w - x_{n+1}\overline{w} = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \ldots \lambda_k w_k.$$

Aggiungendo $x_{n+1}\overline{w}$ a entrambi i mebri vediamo che w è una combinazione lineare di $w_1, \ldots, w_k, \overline{w}$. Questo dimostra che vale (2.4.6). Siccome $k \leqslant n$, abbiamo dimostrato che W è generato da un insieme con al più $n+1$ elementi. □

Esempio 2.4.13. Sia $\mathbb{K}$ un campo. Ogni sottospazio di $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato perchè $\mathbb{K}^n$ è finitamente generato.

2.5 Dipendenza/indipendenza lineare

La seguente è una definizione fondamentale.

Definizione 2.5.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una relazione lineare tra $v_1, \ldots, v_n \in V$ è una uguaglianza

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0, \tag{2.5.1}$$

dove $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. La relazione lineare (2.5.1) è *non banale* se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *non* sono tutti nulli.

Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, una *lista* di vettori in V è un'applicazione $f\colon I \to V$, dove I è un insieme. In generale denotiamo il vettore $f(i)$ che corrisponde a $i \in I$ con v_i, e la lista con $\{v_i\}_{i \in I}$. (Pensiamo agli elementi di I come "indici".) Se $I = \{1, \ldots, n\}$, denotiamo una lista $I \to V$ con $v_1, \ldots, v_n$.

Definizione 2.5.2. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e sia $\{v_i\}_{i \in I}$ una lista di vettori in V. I vettori di $\{v_i\}_{i \in I}$ sono *linearmente dipendenti* se esistono indici *distinti* $i_1, \ldots, i_n \in I$ con la proprietà che esiste una relazione lineare non banale tra $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in V$. I vettori della lista $\{v_i\}_{i \in I}$ sono *linearmente indipendenti* in caso contrario (cioè se non sono lineamente dipendenti). Si intende che la lista vuoat (cioè con $I = \varnothing$) è una lista di vettori linearmente *in*dipendenti.

Esplicitiamo la definizione di vettori linearmente dipendenti/indipendenti nel caso di una lista finita $v_1, \ldots, v_n$. I vettori sono linearmente dipendenti se esiste una relazione lineare non banale tra $v_1, \ldots, v_n$, e invece sono indipendenti se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n = 0$$

vale solo per $0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$.

Esempio 2.5.3. I vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^n$ definiti da (2.4.2) sono linearmente indipendenti, i vettori $v_1 = (2, 2)$, $v_2 = (3, 3)$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente dipendenti perchè $3v_1 - 2v_2 = 0$.

Esempio 2.5.4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ i vettori $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$, cioè i vettori della lista $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ sono lineamente indipendenti.

Esempio 2.5.5. Siano $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^2$ dati da $v_1 = (a, b)$ e $v_2 = (c, d)$. Allora v_1, v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se $(ad - bc) = 0$. Infatti supponiamo che

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = 0$$

cioè

$$ax_1 + cx_2 = 0, \qquad bx_1 + dx_2 = 0. \tag{2.5.2}$$

Moltiplicando la prima equazione per b e aggiungendogli la seconda equazione moltiplicata per $-a$ otteniamo che

$$(bc - ad)x_2 = 0. \tag{2.5.3}$$

D'altra parte moltiplicando la prima equazione di (2.5.2) per d e aggiungendogli la seconda equazione moltiplicata per $-c$ otteniamo che

$$(ad - bc)x_1 = 0. \tag{2.5.4}$$

Segue che se v_1, v_2 sono linearmente dipendenti allora $(ad - bc) = 0$: infatti esiste una soluzione non banale (x_1, x_2) di (2.5.2) e per (2.5.3) e (2.5.4) segue che $(ad - bc) = 0$. Ora dimostriamo che se $(ad - bc) = 0$ allora v_1, v_2 sono linearmente dipendenti. Se $0 = a = b = c = d$ cioè $(0, 0) = v_1 = v_2$ non c'è nulla da dire (abbiamo per esempio che $1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 = 0$). Quindi possiamo supporre che $(a, c) \neq (0, 0)$ o $(b, d) \neq (0, 0)$. Nel primo caso una soluzione non banale di (2.5.2) è data da $x_1 = c$, $x_2 = -a$, nel secondo caso una soluzione non banale di (2.5.2) è data da $x_1 = d$, $x_2 = -b$.

Definizione 2.5.6. Una *matrice* 2×2 con entrate in un campo $\mathbb{K}$ è una collezione ordinata M di 4 elementi di $\mathbb{K}$, diciamo a, b, c, d. Scriviamo la matrice così:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Le *righe* di M sono (a, b) e (c, d) rispettivamente, le sue colonne sono (a, c) e (b, d) rispettivamente. Il *determinante* di M è il numero

$$\det M := (ad - bc). \tag{2.5.5}$$

Osservazione 2.5.7. L'esempio 2.5.5 dà un caso in cui è utile disporre della nozione di matrice 2×2 e suo determinante: infatti abbiamo visto che i vettori $v_1, v_2 \in \mathbb{K}^2$ sono linearmente dipendenti se e solo se è nullo il determinante della matrice 2×2 che ha come righe (o colonne) i vettori v_1 e v_2. Nel Capitolo 3 considereremo matrici di ordine qualsiasi, e nel Capitolo 5 definiremo il determinante di matrici quadrate di ordine arbitrario.

Osservazione 2.5.8. Nella definizione di vettori linearmente dipendenti, i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono una *lista* di vettori, cioè un'applicazione da $\{1, 2, \ldots, n\} \to V$, e *non* un insieme. Quindi può accadere che $v_i = v_j$ per $i \neq j$, e in tal caso i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti perchè $v_i - v_j = 0$ è una relazione lineare non banale.

Osservazione 2.5.9. Sia $\{v_i\}_{i \in I}$ una lista di vettori $v_i \in V$. Se esiste $i \in I$ tale che $v_i = 0$, allora $\{v_i\}_{i \in I}$ è una lista di vettori linearmente dipendenti. Infatti $v_i = 0$ è una relazione lineare non banale.

Proposizione 2.5.10. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. I vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se esiste $1 \leqslant i \leqslant n$ tale che v_i è nel sottospazio generato dai restanti vettori, cioè*

$$v_i \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle. \tag{2.5.6}$$

Dimostrazione. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente dipendenti cioè esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che valga (2.5.1). Quindi esiste $1 \leqslant i \leqslant n$ tale che $\lambda_i \neq 0$. Moltiplicando entrambi i membri di (2.5.1) per λ_i^{-1} otteniamo che

$$\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}v_{i-1} + v_i + \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1} + \ldots + \lambda_i^{-1}\lambda_n v_n = 0 \tag{2.5.7}$$

e dunque

$$v_i = -\lambda_i^{-1}\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_i^{-1}\lambda_{i-1}v_{i-1} - \lambda_i^{-1}\lambda_{i+1}v_{i+1} - \ldots - \lambda_i^{-1}\lambda_n v_n. \tag{2.5.8}$$

Questo dimostra che $v_i \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle$. Ora supponiamo che valga (2.5.6) cioè esistono $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tali che $v_i = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots + a_n v_n$: allora abbiamo che

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_{i-1}v_{i-1} - v_i + a_{i+1}v_{i+1} + \ldots + a_n v_n = 0 \tag{2.5.9}$$

e quindi $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. □

Osservazione 2.5.11. L'affermazione "i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti" è un'affermazione sulla *lista* di vettori $v_1, \ldots, v_n$, *non* si afferma che *ciascun* vettore della lista $v_1, \ldots, v_n$ ha la proprietà di essere "linearmente indipendente". Questa è un'osservazione banale, ma esiste il pericolo di fraintendimento perchè a rigore bisognerebbe affermare che "la lista $v_1, \ldots, v_n$ è linearmente dipendente". Ovviamente, analoghe considerazione valgono per l'affermazione "i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti".

2.6 Basi

La seguente è una definizione fondamentale.

Definizione 2.6.1. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Una lista $\{v_i\}_{i \in I}$ di vettori di V è una *base* di V se i vettori della lista sono linearmente indipendenti e V è generato dai vettori della lista.

Esempio 2.6.2. I vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{K}^n$ definiti da (2.4.2) formano una base di $\mathbb{K}^n$: questa è la *base standard* di $\mathbb{K}^n$.

Esempio 2.6.3. Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$ è data dalla lista $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Proposizione 2.6.4. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ generato dai vettori $v_1, \ldots, v_n$ (qui si ammette che la lista sia vuota). Allora esiste una base di V ottenuta eliminando alcuni dei v_i, cioè esistono $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$ tali che $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ sia una base di V.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 0$, cioè la lista è vuota, allora $V = \{0\}$, e siccome la lista vuota (per definizione) è una lista linearmente indipendente, una base è data dalla lista stessa (cioè la lista vuota). Dimostriamo il passo induttivo, cioè supponiamo che l'affermazione della proposizione valga per $n \geqslant 0$, e dimostriamo che vale l'affermazione ottenuta sostituendo $n+1$ a n. Per ipotesi $V = \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle$. Se $v_1, \ldots, v_{n+1}$ sono linearmente indipendenti, allora $\{v_1, \ldots, v_{n+1}\}$ è una base di V, e abbiamo fatto. Quindi possiamo supporre che $v_1, \ldots, v_{n+1}$ siano linearmente dipendenti. Per la Proposizione 2.5.10 esiste $1 \leqslant i \leqslant n+1$ tale che v_i sia nel sottospazio generato dai restanti vettori. Rimunerando i vettori possiamo supporre che $i = n+1$, cioè che $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Segue che

$$V = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle. \tag{2.6.1}$$

Infatti sia $v \in V$; siccome $v_1, \ldots, v_{n+1}$ generano V, esistono $\theta_1, \ldots, \ldots, \theta_{n+1} \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \theta_1 v_1 + \ldots + \theta_{n+1} v_{n+1}. \tag{2.6.2}$$

Siccome $v_{n+1} \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, esistono $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$v_{n+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n. \tag{2.6.3}$$

Sostituendo nel membro di destra di (2.6.2) membro di destra di (2.6.3) otteniamo che v è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$. Questo dimostra che vale l'uguaglianza in (2.6.1). Ma allora, per ipotesi induttiva, esistono $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n$ tali che $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}\}$ sia una base di V. Siccome $i_m < (n+1)$, abbiamo fatto.

□

Dalla Proposizione 2.6.4 segue subito il seguente corollario.

Corollario 2.6.5. *Uno spazio vettoriale finitamente generato ha una base.*

Il seguente risultato è l'analogo della Proposizione 2.6.4 ottenuto sostituendo "sistema di generatori" con "lista di vettori linearmente indipendenti".

Proposizione 2.6.6. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato. Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$ linearmente indipendenti: esistono $v_{m+1}, \ldots, v_{m+q} \in V$ tali che $\{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+q}\}$ sia una base di V. (Il caso $q = 0$ è ammesso: significa che $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base di V.)*

Dimostrazione. Per $l \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}_l$ la seguente affermazione:

$\mathcal{P}_l$: Siano $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_l$ generatori di V tali che $v_1, \ldots, v_m$ siano linearmente indipendenti. Allora esistono $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant l$ tali che $\{v_1, \ldots, v_m, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}\}$ sia una base di V.

È chiaro che se vale $\mathcal{P}_l$ per ogni l, allora vale la proposizione. Dimostriamo per induzione su l che vale $\mathcal{P}_l$ per ogni l. Se $l = 0$ allora $\{v_1, \ldots, v_m\}$ è una base di V, quidni $\mathcal{P}_0$ è banalmente vera. Dimostriamo il passo induttivo, cioè supponiamo che valga $\mathcal{P}_l$ e dimostriamo che vale $\mathcal{P}_{l+1}$. Se $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{l+1}$ sono linearmente indipendenti allora formano una base e $\mathcal{P}_{l+1}$ vale con $q = l + 1$ e, ovviamente, $j_1 = 1, j_2 = 2, \ldots, j_{l+1} = l + 1$. Rimane da esaminare il caso in cui $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{l+1}$ sono linearmente dipendenti. Quindi esiste una relazione lineare non banale

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_m v_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_{l+1} u_{l+1} = 0. \tag{2.6.4}$$

Se β_j fosse nullo per ogni $j \in \{1, \ldots, l + 1\}$ l'equazione in (2.6.4) darebbe una relazione lineare non banale tra $v_1, \ldots, v_m$, e questo contraddice l'ipotesi che $v_1, \ldots, v_m$ siano linearmente indipendenti. Quindi esiste $\overline{j} \in \{1, \ldots, l + 1\}$ tale che $\beta_{\overline{j}} \neq 0$. Dall'uguaglianza in (2.6.4) segue che

$$u_{\overline{j}} = -\beta_{\overline{j}}^{-1}\alpha_1 v_1 - \ldots - \beta_{\overline{j}}^{-1}\alpha_m v_m - \beta_{\overline{j}}^{-1}\beta_1 u_1 \ldots - \beta_{\overline{j}}^{-1}\beta_{j-1}u_{j-1} - \beta_{\overline{j}}^{-1}\beta_{j+1}u_{j+1} - \beta_{\overline{j}}^{-1}\beta_{l+1}u_{l+1} = 0.$$

Quindi $u_{\overline{j}}$ è nel sottospazio $\langle v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{\overline{j}-1}, \ldots, u_{\overline{j}+1}, \ldots, u_{l+1}\rangle$. Segue che V è generato da $v_1, \ldots, v_m, u_1, \ldots, u_{\overline{j}-1}, \ldots, u_{\overline{j}+1}, \ldots, u_{l+1}$ (vedi la dimostrazione della Proposizione 2.6.4). Per l'ipotesi induttiva (cioè la validità di $\mathcal{P}_l$) esistono $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant l + 1$ con $j_t \neq \overline{j}$ per ogni t tali che $\{v_1, \ldots, v_m, u_{j_1}, \ldots, u_{j_q}\}$ sia una base di V. □

Siano $v_1, \ldots, v_m \in V$ e $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_{m+q}\}$ come nell'enunciato della 2.6.6: si dice che $v_1, \ldots, v_m \in V$ si *estende* alla base $\mathcal{B}$ di V. Quindi la proposizione afferma che in uno spazio vettoriale finitamente generato ogni lista di vettori linearmente indipendenti si estende a una base.

Dati $v_1, \ldots, v_n \in V$ definiamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \xrightarrow{f} & V \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longrightarrow & x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n \end{array} \tag{2.6.5}$$

Proposizione 2.6.7. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$.*

(a) $v_1, \ldots, v_n$ generano V se e solo se l'applicazione f in (2.6.5) *è suriettiva, e*

(b) $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'applicazione f in (2.6.5) *è iniettiva.*

Dimostrazione. (a) vale per definizione. Dimostriamo che vale (b). Supponiamo che $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, cioè

$$x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n = y_1v_1 + y_2v_2 + \ldots + y_nv_n.$$

Aggiungendo l'opposto del membro di destra a entrambi i membri troviamo che

$$(x_1 - y_1)v_1 + (x_2 - y_2)v_2 + \ldots + (x_n - y_n)v_n = 0,$$

Siccome $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti segue che $x_i = y_i$ per ogni i. □

Corollario 2.6.8. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $v_1, \ldots, v_n \in V$. Allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V se e solo se l'applicazione f in* (2.6.5) *è biunivoca.*

Sia $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V, e sia f data da (2.6.5): per il Corollario 2.6.8 la f è biunivoca e quindi è definita la sua inversa che denotiamo $X_{\mathcal{B}}$:

$$V \xrightarrow{X_{\mathcal{B}}} \mathbb{K}^n \tag{2.6.6}$$

Definizione 2.6.9. La n-pla delle *coordinate* di $v \in V$ è $X_{\mathcal{B}}(v)$.

Esempio 2.6.10. Sia $\mathcal{S} := \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base standard di $\mathbb{K}^n$. Le coordinate di $X = (x_1, \ldots, x_n)$ nella base $\mathcal{S}$ sono date da $(x_1, \ldots, x_n)$.

Esempio 2.6.11. Una base di $\mathbb{R}^2$ è $\mathcal{B} := \{(1,1), (1,-1)\}$ (verificatelo). Se (t_1, t_2) sono le coordinate di $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ nella base $\mathcal{B}$, allora

$$(x_1, x_2) = t_1(1,1) + t_2(1,-1).$$

Quindi, per determinare (t_1, t_2) risolviamo il sistema di equazioni lineari

$$t_1 + t_2 = x_1, \qquad t_1 - t_2 = x_2.$$

Semplici calcoli danno che $t_1 = (x_1 + x_2)/2$ e $t_2 = (x_1 - x_2)/2$. Notate che le coordinate di X nella base $\mathcal{B}$ sono completamente diverse da quelle nella base standard $\mathcal{S}$.

Un fatto fondamentale è che il numero di elementi in una base di uno spazio vettoriale è indipendente dalla base. Questo risultato sarà una conseguenza del seguente lemma.

Lemma 2.6.12. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Supponiamo che $v_1, \ldots, v_m, u \in V$ siano linearmente indipendenti (il caso $m = 0$ è ammesso) e che $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$ siano generatori di V. Allora $1 \leqslant n$ ed esiste $1 \leqslant i \leqslant n$ tale che V sia generato da*

$$v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_{i-1}, u, w_{i+1}, \ldots, w_n.$$

Dimostrazione. Siccome $V = \langle v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n \rangle$ esistono $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{K}$ tali che

$$u = x_1 v_1 + \ldots + x_m v_m + y_1 w_1 + \ldots + y_n w_n. \tag{2.6.7}$$

Se fosse $0 = y_1 = y_2 = \ldots = y_n$ (questa ipotesi include il caso $n = 0$) allora u sarebbe combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_m$ e quindi $v_1, \ldots, v_m, u$ sarebbero linearmente dipendenti (vedi la Proposizione 2.5.10) contro l'ipotesi. Quindi $1 \leqslant n$ ed esiste $1 \leqslant i \leqslant n$ tale che $y_i \neq 0$. Moltiplicando per $-y_i^{-1}$ ambo i membri di (2.6.7) ed aggiungendo $(w_i + y_i^{-1} u)$ ai membri dell'equazione così ottenuta arriviamo all'equazione

$$w_i = -y_i^{-1} x_1 v_1 - \ldots - y_i^{-1} x_m v_m - y_i^{-1} y_1 w_1 - \ldots - y_i^{-1} y_{i-1} w_{i-1} + y_i^{-1} u - y_i^{-1} y_{i+1} w_{i+1} - y_i^{-1} y_n w_n.$$

Questo dimostra che $w_i \in \langle v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_{i-1}, u, w_{i+1}, \ldots, w_n \rangle$. Siccome V è generato da

$$v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n$$

segue che è anche generato da $v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_{i-1}, u, w_{i+1}, \ldots, w_n$. □

Teorema 2.6.13. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Supponiamo che $r_1, \ldots, r_p \in V$ siano linearmente indipendenti e che $z_1, \ldots, z_q \in V$ siano generatori di V. Allora $p \leqslant q$ ed esistono $1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \ldots < j_p \leqslant q$ tali che V è generato da*

$$\{r_1, \ldots, r_p\} \cup \{z_1, \ldots, z_q\} \backslash \{z_{j_1}, z_{j_2}, \ldots, z_{j_p}\}. \tag{2.6.8}$$

In altre parole: sostituendo nella lista $z_1, \ldots, z_q$ ciascun z_{j_i} con r_i otteniamo un nuovo sistema di generatori.

Dimostrazione. Per induzione su p. Più precisamente sia A_p l'affermazione della proposizione: dimostriamo per induzione che è vera per ogni p. Il caso $p = 0$ è banalmente vero. (Se non vi piace il caso $p = 0$ cominciate l'induzione da $p = 1$: l'affermazione A_1 è vera per il caso $m = 0$ del 2.6.12.) Dimostriamo il passo induttivo, cioè assumiamo che A_p sia vera e dimostriamo che è vera A_{p+1}. Per l'ipotesi induttiva V è generato da (2.6.8). Applicando il Lemma 2.6.12 con $m = p$ e $u = r_{p+1}$, vediamo che vale A_{p+1}. □

Corollario 2.6.14. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato, e che quindi ammette basi finite per il Corollario 2.6.5. Due basi di V hanno la stessa cardinalità.*

Dimostrazione. Prima notiamo che ogni base di V è finita. Infatti se $\{v_i\}_{i\in I}$ fosse una base di cardinalità infinita, esisterebbero liste arbitrariamente lunghe $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ di vettori linearmente indipendenti di V, e questo contraddirebbe il Teorema 2.6.13. Questo dimostra che ogni base di V è finita. Siano $\{r_1, \ldots, r_p\}$ e $\{z_1, \ldots, z_q\}$ basi di V. Siccome i vettori $r_1, \ldots, r_p$ sono linearmente indipendenti e i vettori $z_1, \ldots, z_q$ sono generatori di V, si ha $p \leqslant q$ per il Teorema 2.6.13. D'altra parte i vettori $z_1, \ldots, z_q$ sono linearmente indipendenti e $r_1, \ldots, r_p$ sono generatori di V, e quindi $q \leqslant p$ per il Teorema 2.6.13. Concludiamo che $p = q$. □

Osservazione 2.6.15. Abbiamo dimostrato che uno spazio vettoriale finitamente generato ammette basi e che due basi hanno la stessa cardinalità. In verità le stesse affermazioni valgono per ogni spazio vettoriale, vedi [3].

Il Corollario 2.6.14 ci permette di dare la seguente definizione fondamentale.

Definizione 2.6.16. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato (e quindi V ammette basi per la 2.6.4). La *dimensione* di V è la cardinalità di una qualsiasi base di V.

Esempio 2.6.17.

1. Lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ ha dimensione n perchè $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ è una base di $\mathbb{K}^n$.
2. La dimensione di $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale *reale* è $2n$ perchè $\mathbf{e}_1, i\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, i\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, i\mathbf{e}_n$ è una base di $\mathbb{C}^n$ come spazio vettoriale reale.
3. $\mathbb{K}[x]_{\leqslant n}$ ha dimensione $(n+1)$ perchè una sua base è $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.
4. Lo spazio vettoriale $\mathsf{V}(\mathbb{E}^2)$ dei vettori geometrici nel piano ha dimensione 2, perchè una sua base è data da una qualsiasi coppia di vettori *non* paralleli.

Proposizione 2.6.18. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato di dimensione n.*

1. *Supponiamo che $v_1, \ldots, v_m \in V$ siano linearmente indipendenti. Allora $m \leqslant n$ e se $m = n$ la lista $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V.*
2. *Supponiamo che $\langle v_1, \ldots, v_m \rangle = V$. Allora $m \geqslant n$ e se $m = n$ la lista $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V.*

Dimostrazione. (1) e (2) sono conseguenze immediate Per la Proposizione 2.6.4 possiamo eliminare alcuni dei v_i e ottenere una base $\mathcal{C}$ di V. Siccome $\dim V = n$ segue che $m \geqslant n$. Se $m = n$ abbiamo che $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e quindi $W = V$. □

Esempio 2.6.19. Sia V uno uno spazio vettoriale con base $\{w_1, w_2\}$ (quindi $\dim V = 2$). Siano $v_1, v_2 \in V$ dati da

$$v_1 := aw_1 + bw_2, \qquad v_2 := cw_1 + dw_2. \tag{2.6.9}$$

Copiando gli argomenti dell'Esempio 2.5.5 si vede che v_1, v_2 sono linearmente dipendenti se e solo se $(ad - bc) = 0$ ovvero sono linearmente indipendenti se e solo se $(ad - bc) \neq 0$. Per la Proposizione 2.6.18 segue che $\{v_1, v_2\}$ è una base di V se e solo se $(ad - bc) \neq 0$.

Esempio 2.6.20. Consideriamo il sistema di equazioni lineari omogenee (2.3.5). La soluzione *banale* di (2.3.5) è quella con $x_j = 0$ per ogni $1 \leqslant j \leqslant n$. Notate che la soluzione banale esiste indipendentemente dal sistema scelto, ci interessa sapere se esiste o non esiste una soluzione non banale. Supponiamo che $n > m$ cioè che esistano più incognite che equazione: dimostriamo che esiste una soluzione non banale. Siano $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^m$ i vettori definiti da

$$v_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{mj}).$$

Allora $(x_1, \ldots, x_n)$ è soluzione di (2.3.5) se e solo se

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v = 0. \tag{2.6.10}$$

Siccome $\dim \mathbb{K}^m = m$ e per ipotesi $m < n$ la Proposizione 2.6.18 ci assicura che $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Quindi esistono $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che valga (2.6.10) e cioè una soluzione non banale di (2.3.5).

Corollario 2.6.21. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato. Se $W \subset V$ è un sottospazio allora* $\dim W \leqslant \dim V$ *e si ha eguaglianza se e solo se $W = V$.*

Dimostrazione. Sia $\{w_1, \ldots, w_m\}$ una base di W: allora $w_1, \ldots, w_m$ sono linearmente indipendenti e quindi il corollario segue dal punto (1) della Proposizione 2.6.18. □

Esempio 2.6.22. Siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, e sia $W \subset \mathbb{K}^n$ il sottospazio delle soluzioni $X = (x_1, \ldots, x_n)$ dell'equazione omogenea

$$a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = 0. \tag{2.6.11}$$

Dimostriamo che

$$\dim W = \begin{cases} n & \text{se } 0 = a_1 = \ldots = a_n \\ n-1 & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.6.12}$$

Se $0 = a_1 = \ldots = a_n$, allora $W = \mathbb{K}^n$, e $\dim \mathbb{K}^n = n$ per l'Esempio 2.6.17. Ora supponiamo che esista $i \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $a_i \neq 0$. L'equazione in (2.6.11) equivale a

$$x_i = -a_i^{-1} \cdot a_1 x_1 - a_i^{-1} \cdot a_2 x_2 - \ldots - a_i^{-1} \cdot a_n x_n. \tag{2.6.13}$$

In particolare vediamo che W non è tutto $\mathbb{K}^n$ e quindi, per il Corollario 2.6.21, la sua dimensione è strettamente più piccola della dimensione di $\mathbb{K}^n$ cioè $\dim W \leqslant (n-1)$. Inoltre dalla (2.6.13) segue che i vettori

$$\mathbf{e}_1 - a_i^{-1} \cdot a_1 \mathbf{e}_i, \ -a_i^{-1} \cdot a_2 \mathbf{e}_2, \ \ldots, \ -a_i^{-1} \cdot a_n \mathbf{e}_n \tag{2.6.14}$$

appartengono a W. Si vede facilmente che tali vettori sono linearmente indipendenti, e quindi $\dim W \geqslant (n-1)$. Siccome $\dim W \leqslant (n-1)$, segue che $\dim W = (n-1)$.

2.7 Formula di Grassmann

Consideriamo uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ e sottospazi $U, W \subset V$. Supponiamo che U e W siano finitamente generati, diciamo $U = \langle x_1, \ldots, x_p \rangle$ e $W = \langle y_1, \ldots, y_q \rangle$: allora $(U + W) = \langle x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q \rangle$ e quindi anche la somma $(U + W)$ è uno spazio finitamente generato. Per la 2.4.12 anche $U \cap W$ è finitamente generato. Quindi nell'ipotesi fatta le dimensioni di U, W, $(U + W)$ e $U \cap W$ sono definite. La formula di Grassmann dà una relazione tra queste dimensioni.

Proposizione 2.7.1 (Formula di Grassmann)**.** *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $U, W \subset V$ sottospazi finitamente generati. Allora*

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim U + \dim W. \tag{2.7.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{z_1, \ldots, z_a\}$ una base di $U \cap W$ ed estendiamola a una base $\{z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m\}$ di U e a una base $\{z_1, \ldots, z_a, w_1, \ldots, w_n\}$ di W. Dimostriamo che

$$\mathcal{B} := \{z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n\}$$

è una base di $(U + W)$. Siccome $z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m$ generano U e $z_1, \ldots, z_a, w_1, \ldots, w_n$ generano W lo spazio $(U + W)$ è generato da $z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$. Rimane da dimostrare che $z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti. Supponiamo che

$$\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_a z_a + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_m u_m + \theta_1 w_1 + \ldots + \theta_n w_n = 0. \tag{2.7.2}$$

Quindi abbiamo che

$$\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_a z_a + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_m u_m = -(\theta_1 w_1 + \ldots + \theta_n w_n). \tag{2.7.3}$$

Il membro di sinistra di (2.7.3) è in U e il membro di destra (uguale a quello di sinistra) è in W, quindi sono entrambi in $U \cap W$. Siccome $\{z_1, \ldots, z_a\}$ è una base di $U \cap W$ esistono $\tau_1, \ldots, \tau_a \in \mathbb{K}$ tali che

$$\tau_1 z_1 + \ldots + \tau_a z_a = -(\theta_1 w_1 + \ldots + \theta_n w_n). \tag{2.7.4}$$

Ma $z_1, \ldots, z_a, w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti, quindi $0 = \tau_1 = \ldots = \tau_a = \theta_1 = \ldots = \theta_n$. Sostituendo $0 = \theta_1 = \ldots = \theta_n$ nella (2.7.2) otteniamo che

$$\lambda_1 z_1 + \ldots + \lambda_a z_a + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_m u_m = 0. \tag{2.7.5}$$

Siccome $z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m$ sono linearmente indipendenti segue che $0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_a = \mu_1 = \ldots = \mu_m$. Questo dimostra che $z_1, \ldots, z_a, u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n$ sono linearmente indipendenti e quindi che $\mathcal{B}$ è una base di $(U + W)$. Dunque abbiamo che

$$\dim(U + W) = a + m + n, \quad \dim U \cap W = a, \quad \dim U = a + m, \quad \dim W = a + n$$

e perciò vale (2.7.1). □

Diamo il seguente corollario della formula di Grassmann.

Corollario 2.7.2. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato. Se $U, W \subset V$ sono sottospazi tali che $\dim U + \dim W > \dim V$ allora esiste un vettore non nullo in $U \cap W$.*

Dimostrazione. Per la formula di Grassman

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W).$$

Siccome $\dim(U + W) \leqslant \dim V$ segue che $\dim(U \cap W) > 0$, e quindi $U \cap W \neq \{0\}$. □

Definizione 2.7.3. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e $W \subset V$ un sottospazio. La *codimensione* di W in V è

$$\operatorname{cod}(W, V) := \dim V - \dim W.$$

2.8 Costruzioni astratte di spazi vettoriali

Presenteremo due costruzioni che producono uno spazio vettoriale a partire da altri spazi vettoriali.

Somma diretta

Siano V e W spazi vettoriali sul campo $\mathbb{K}$. Definiamo la somma di elementi $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in V \times W$ così:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2). \tag{2.8.1}$$

Dati $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(v, w) \in V \times W$ definiamo

$$\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w). \tag{2.8.2}$$

Si verifica facilmente che con queste operazioni $V \times W$ è uno spaziovettoriale su $\mathbb{K}$. L'elemento neutro è $(0_V, 0_W)$ dove 0_V e 0_W sono gli elementi neutri di V e W rispettivamente, e l'opposto di (v, w) è $(-v, -w)$. Lo spazio vettoriale $V \times W$ (con le operazioni appena definite) si denota $V \oplus W$ e si chiama la *somma diretta* di V e W.

Proposizione 2.8.1. *Siano V e W spazio vettoriali finitamente generati su $\mathbb{K}$. Allora*

$$\dim(V \oplus W) = \dim V + \dim W.$$

Dimostrazione. Siano $\{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ basi di V e W rispettivamente. Dimostreremo che

$$\{(v_1, 0_W), \ldots, (v_m, 0_W), (0_V, w_1), \ldots, (0_V, w_n)\} \tag{2.8.3}$$

è una base di $V \oplus W$, e la proposizione seguirà. I vettori di (2.8.3) generano $V \oplus W$ perchè dato $(v, w) \in V \oplus W$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$ tali che $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ e $w = \sum_{j=1}^n \mu_j w_j$ (perchè $\{v_1, \ldots, v_m\}$ genera V e $\{w_1, \ldots, w_n\}$ genera W), e quindi

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^n \mu_j (0_V, w_j) = (\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \mu_j w_j) = (v, w). \tag{2.8.4}$$

Per dimostrare che i vettori di (2.8.3) sono linearmente indipendenti supponiamo che

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (v_i, 0_W) + \sum_{j=1}^n \mu_j (0_V, w_j) = (0_V, 0_W).$$

Guardando a (2.8.4) vediamo che necessariamente $0 = \lambda_1, \ldots, \lambda_m = \mu_1, \ldots, \mu_n$. □

Se $V_1, \ldots, V_m$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ si definisce analogamente la somma di elementi di $V_1 \times \ldots \times V_m$ e la moltiplicazione di uno scalare per un elemento di $V_1 \times \ldots \times V_m$:

$$(v_1, \ldots, v_m) + (w_1, \ldots, w_m) := (v_1 + w_1, \ldots, v_m + w_m), \qquad \lambda(v_1, \ldots, v_m) := (\lambda v_1, \ldots, \lambda v_m). \tag{2.8.5}$$

Con queste operazioni $V_1 \times \ldots \times V_m$ è uno spaziovettoriale su $\mathbb{K}$ denotato $V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ e si chiama la *somma diretta* di $V_1, \ldots, V_m$. Supponiamo che $V_1, \ldots, V_m$ siano finitamente generati su $\mathbb{K}$; una dimostrazione analoga a quella della Proposizione 2.8.1 dà che

$$\dim(V_1 \oplus \ldots \oplus V_m) = \dim V_1 + \ldots + V_m.$$

Quoziente

Per la prossima costruzione assumiamo che V sia uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e che $W \subset V$ sia un sottospazio vettoriale. Definiamo la relazione $\overset{W}{\sim}$ su V così:

$$v_1 \overset{W}{\sim} v_2 \text{ se e solo se } (v_1 - v_2) \in W. \tag{2.8.6}$$

Si verifica facilmente che $\overset{W}{\sim}$ è una relazione di equivalenza: infatti $\overset{W}{\sim}$ è riflessiva perchè $0 \in W$, è simmetrica perchè se $w \in W$ allora l'opposto $-w \in W$ ed è transitiva perchè W è chiuso per la somma. Chiamiamo $\overset{W}{\sim}$ la *congruenza modulo W*.

Esempio 2.8.2. Se $W = V$ allora $V_1 \overset{W}{\sim} v_2$ per ogni $v_1, v_2 \in V$, cioè esiste un'unica classe di congruenza modulo W. Se $W = \{0\}$ allora $V_1 \overset{W}{\sim} v_2$ solo se $v_1 = v_2$, cioè possiamo identificare l'insieme delle classi di equivalenza con V stesso.

Esempio 2.8.3. Siano $V = \mathbb{K}^n$ e $W = \langle e_n \rangle = \{X \in \mathbb{K}^n \mid x_1 = x_2 = \ldots = x_{n-1} = 0\}$. Vettori $X, Y \in \mathbb{K}^n$ sono congruenti modulo W se solo se $x_i = y_i$ per $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. Più in generale, sia $W \subset \mathbb{K}^n$ il sottospazio generato da $e_{j+1}, e_{j+2}, \ldots, e_n$. Allora $X, Y \in \mathbb{K}^n$ sono congruenti modulo W se solo se $x_i = y_i$ per $i \in \{1, \ldots, j\}$.

Proposizione 2.8.4. *Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Supponiamo che $v \overset{W}{\sim} v'$ e $u \overset{W}{\sim} u'$. Allora*

$$(v + u) \overset{W}{\sim} (v' + u'), \qquad \lambda v \overset{W}{\sim} \lambda v'. \tag{2.8.7}$$

Dimostrazione. Per ipotesi $(v - v'), (u - u') \in W$; siccome W è un sottospazio è chiuso per somma,

$$(v + u) - (v' + u') = (v - v') + (u - u') \in W.$$

Questo dimostra la prima congruenza di (2.8.7). La seconda si dimostra in modo analogo. □

Per semplificare la notazione denotiamo $\overset{W}{\sim}$ con $\sim$. La Proposizione 2.8.4 permette di definire una operazione di somma su $V/\sim$. Se $[v], [u] \in V/\sim$ poniamo

$$[v] + [u] := [v + u]. \tag{2.8.8}$$

Notate che la definizione è ben posta (cioè la somma di $[v]$ e $[u]$ *non* dipende dai rappresentanti delle classi di equivalenza) grazie alla Proposizione 2.8.4. Analogamente definiamo una moltiplicazione per scalari. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $[v] \in V/\sim$ poniamo

$$\lambda[v] := [\lambda v] \tag{2.8.9}$$

Di nuovo: la definizione è ben posta grazie alla Proposizione 2.8.4. Si verifica facilmente che con queste operazioni $V/\sim$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, con elemento neutro dato da $[0]$ (notate che $[0] = W$).

Definizione 2.8.5. Siano V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e $W \subset V$ un sottospazio. Il *quoziente di V modulo W* è lo spazio vettoriale $V/\sim$ delle classi di congruenza modulo W con le operazioni di somma e moltiplicazione per scalari appena definiti. Lo denotiamo V/W.

Esempio 2.8.6. Se $W = V$ allora V/W è lo spazio vettoriale banale con unico elemento il vettore nullo. Se $W = \{0\}$ allora l'applicazione quoziente $V \longrightarrow V/W$ è una corrispondenza biunivoca. Se $W \subset \mathbb{K}^n$ è il sottospazio generato da $e_{j+1}, e_{j+2}, \ldots, e_n$, allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^j & \longrightarrow & \mathbb{K}^n/W \\ (t_1, \ldots, t_j) & \mapsto & (t_1, \ldots, t_j, 0, \ldots, 0) \end{array}$$

è biunivoca.

Proposizione 2.8.7. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato su $\mathbb{K}$ e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale. Allora V/W è finitamente generato e* $\dim(V/W) = \dim V - \dim W$.

Dimostrazione. Siano $v_1, \ldots, v_n$ generatori di V: allora $[v_1], \ldots, [v_n]$ sono generatori di V/W e quindi V/W è finitamente generato. Sia $\{w_1, \ldots, w_a\}$ una base di W: estendiamola a una base $\{w_1, \ldots, w_a, u_1, \ldots, u_b\}$ di V. Allora $(\dim V - \dim W) = b$ e quindi è sufficiente dimostrare che $\{[u_1], \ldots, [u_b]\}$ è una base di V/W. Prima dimostriamo che V/W è generato da $[u_1], \ldots, [u_b]$. Sia $[v] \in V/W$: siccome $w_1, \ldots, w_a, u_1, \ldots, u_b$ generano V esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_a, \mu_1, \ldots, \mu_b \in \mathbb{K}$ tali che

$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_a w_a + \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_b u_b \overset{W}{\sim} \mu_1 u_1 + \ldots + \mu_b u_b.$$

Quindi $[v] = \mu_1[u_1] + \ldots + \mu_b[u_b]$. Ora dimostriamo che $[u_1], \ldots, [u_b]$ sono linearmente indipendenti. Quindi supponiamo che esistano $\mu_1, \ldots, \mu_b \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mu_1[u_1] + \ldots + \mu_b[u_b] = [0].$$

Siccome $[0] = W$ ciò significa che esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_a \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mu_1 u_1 + \ldots + \mu_b u_b = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_a w_a.$$

Siccome $\{w_1, \ldots, w_a, u_1, \ldots, u_b\}$ è una base di V segue che

$$0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_a = \mu_1 = \ldots = \mu_b.$$

□

Esercizi del Capitolo 2

Esercizio 2.1. *Siano* $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ *definiti da*

$$X := (1, 2, -3), \qquad Y := (3, -5, 2), \qquad Z := (1, 1, -2).$$

Calcolate $2X - Y + Z$. *Trovate* $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ ***non tutti nulli*** *tali che*

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0.$$

Esercizio 2.2. *Determinate quali dei seguenti sottoinsiemi* $W_i \subset \mathbb{K}^3$ *è un sottospazio.*

1. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $W_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *e* $W_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \leqslant 1\}$.
3. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *e* $W_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.
4. $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ *e* $W_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{F}_2^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

Esercizio 2.3. *Sia* V *uno spazio vettoriale e* $u, v, w \in V$ *tali che*

$$v + u = v + w.$$

Dimostrate che $u = w$.

Esercizio 2.4. *Sia* V *un insieme. Supponiamo che sia definita un'operazione (somma)*

$$\begin{array}{ccc} V \times V & \longrightarrow & V \\ (v, w) & \mapsto & v + w \end{array}$$

e che

(a) *esiste* $0 \in V$ *tale che* $0 + v = v + 0 = v$ *per ogni* $v \in V$,

(b) $v + v = 0$ *per ogni* $v \in V$,

(c) $v + w = w + v$ *per ogni* $v, w \in V$, *e*

(d) $u + (v + w) = (u + v) + w$ *per ogni* $u, v, w \in V$.

Ora definite l'operazione (moltiplicazione per scalari in $\mathbb{F}_2$*)*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_2 \times V & \longrightarrow & V \\ (\lambda, v) & \mapsto & \lambda v \end{array}$$

ponendo

$$\lambda v := \begin{cases} 0 & \textit{se } \lambda = [0], \\ v & \textit{se } \lambda = [1]. \end{cases}$$

Dimostrate che V *con queste operazioni è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{F}_2$. *(Ricordiamo che* $\mathbb{F}_2$ *è il campo delle classi di congruenza modulo 2.)*

Esercizio 2.5. *Sia* X *un insieme, e sia* $\mathcal{P}(X)$ *l'insieme delle parti di* X, *cioè*

$$\mathcal{P}(X) = \{A \subset X\}.$$

Definiamo un'operazione (somma)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & \mathcal{P}(X) \\ (A, B) & \mapsto & A + B \end{array}$$

ponendo

$$A + B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A). \tag{2.8.10}$$

(Ricordiamo che $A \backslash B$ *è l'insieme degli elementi di* A *che non sono in* B.*) Dimostrate che valgono (a), (b), (c) e (d) dell'esercizio 2.4, e quindi (per l'esercizio 2.4)* $\mathcal{P}(X)$ *ha una struttura di spazio vettoriale in cui la somma è data da* (2.8.10).

Esercizio 2.6. *Nello spazio vettoriale* $\mathbb{R}^2$ *siano dati i vettori*

$$v_1 = (1, 2) \qquad v_2 = (4, 2) \qquad v_3 = (6, 3).$$

1. *Dire se i vettori v_1 e v_2 generano $\mathbb{R}^2$.*
2. *Dire se i vettori v_2 e v_3 generano $\mathbb{R}^2$.*

Esercizio 2.7. *Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ siano dati i vettori*

$$v_1 = (1, 2, 1) \qquad v_2 = (1, 2, 0) \qquad v_3 = (1, 0, 1).$$

Verificare che v_1, v_2, v_3 generano $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.8.
1. *Dire per quali sottospazi $W \subset \mathbb{R}^n$ il complementare $\mathbb{R}^n \backslash W$ è a sua volta un sottospazio.*
2. *Dire per quali sottospazi $W \subset \mathbb{R}^n$ l'insieme $(\mathbb{R}^n \backslash W) \cup \{0\}$ è a sua volta un sottospazio.*

Esercizio 2.9. *Sia V uno spazio vettoriale e W_1, W_2 sottospazi vettoriali di V. Dimostrare che se $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio vettoriale di V allora $W_1 \subset W_2$ o $W_2 \subset W_1$.*

Esercizio 2.10. *Siano $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ definiti da*

$$v_1 = (1, 1, 0, -1), \quad v_2 = (1, -2, 3, 2), \quad v_3 = (1, -1, 0, 0), \quad v_4 = (0, 1, 0, 1).$$

Stabilite quali tra $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_2, v_3, v_4\}$, $\{v_3, v_4, v_1\}$ e $\{v_4, v_1, v_2\}$ sono terne di vettori linearmente dipendenti.

Esercizio 2.11. *Siano $v_1, v_2, u, w \in \mathbb{R}^2$ definiti da*

$$v_1 = (1, 1,), \quad v_2 = (1, 2), \quad u = (1, -1), \quad w = (0, 1).$$

1. *Verificate che $\mathcal{B} := \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calcolate le coordinate di u e w nella base $\mathcal{B}$.*

Esercizio 2.12. *Ricordiamo che $\mathbb{K}[x]_{\leqslant d}$ è il sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]$ i cui elementi sono i polinomi di grado al più d. Sia $\alpha \in \mathbb{K}$.*

1. *Dimostrate che*
$$\mathcal{B}_\alpha := \{\alpha, \, (x + \alpha), \, (x + \alpha)^2, \, \ldots, (x + \alpha)^d\}$$
è una base di $\mathbb{K}[x]_{\leqslant d}$.
2. *Determinate le coordinate di x^d nella base $\mathcal{B}_\alpha$. (Può essere utile ricordare la formula del binomio $(a+b)^d = \sum_{i=0}^{d} \binom{d}{i} a^{d-i} b^i$ dove $\binom{d}{i} := \frac{d!}{i!(d-i)!}$.)*

Esercizio 2.13. *Sia $W \subset \mathbb{K}[x]_{\leqslant d}$ definito da*

$$W := \{p \in \mathbb{K}[x]_{\leqslant d} \mid 0 = p(0) = p(-1) = p(1)\}.$$

Dimostrate che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}[x]_d$ e calcolatene la dimensione. (Attenzione: il caso in cui $\operatorname{char} \mathbb{K} = 2$ *è speciale.)*

Esercizio 2.14. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ finitamente generato e sia $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Supponiamo che $v, w \in V$ e che $X_{\mathcal{B}}(v)$ e $X_{\mathcal{B}}(w)$ siano le n-ple di coordinate di V e W rispettivamente.*

1. *A cosa è uguale $X_{\mathcal{B}}(v + w)$?*
2. *A cosa è uguale $X_{\mathcal{B}}(\lambda v)$?*

Esercizio 2.15. *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Sia*

$$u \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle.$$

(Notate che v_i "manca".) Dimostrate che $\mathcal{C} := \{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + u, v_{i+1}, \ldots, v_n\}$ è una base di V.

Esercizio 2.16. *Siano $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ definiti da*

$$v_1 = (a_1, b_1, c_1), \quad v_2 = (a_2, b_2, c_2), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Stabilite sotto quali condizioni $\{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 2.17. *Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e siano $W_1, \ldots, W_p \subset V$ sottospazi. Si dimostri che*

$$\operatorname{cod}(W_1 \cap \ldots \cap W_p, V) \leqslant \operatorname{cod}(W_1, V) + \ldots + \operatorname{cod}(W_p, V).$$

(Suggerimento: si proceda per induzione su p e si applichi la Formula di Grassmann.)

Esercizio 2.18. *Sia $W \subset \mathbb{K}^n$ lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo* (2.3.5)*. Si dimostri che* $\dim W \geqslant (n - m)$. *(Invocate l'Esercizio 2.17 e l'Esempio 2.6.22.)*

Esercizio 2.19. *Sia $\mathbb{K}$ un campo e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ distinti. Siano $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^{n+1}$ definiti da*

$$v_i = (\alpha_0^i, \alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i), \qquad 0 \leqslant i \leqslant n.$$

Dimostrate che $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di $\mathbb{K}^{n+1}$.

Esercizio 2.20. *Sia $d \in \mathbb{Q}$ e poniamo*

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] := \{\alpha + \beta\sqrt{d} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}.$$

1. *Verificate che $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ è un sottocampo di $\mathbb{C}$.*
2. *La somma e la moltiplicazione per $\mathbb{Q}$ danno a $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ una struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{Q}$: calcolatene la dimensione. (La risposta dipende dal numero d.)*