Algebra Lineare a.a. 2023/2024

Esame scritto - 26 Gennaio 2024

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	6	
3	8	
4	10	
5	8	
Totale	40	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $U, V \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ (dove $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado minore o uguale a 3) dati da

$$U := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(0) = p(1) = p(2)\}, \quad W := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p'(0) = p'(1) = p'(2)\}.$$

1. Date una base di U.
2. Date una base di V.
3. I sottospazi U, V sono in somma diretta (cioè $U \cap V = \{0\}$ e $U + V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$)?

Risoluzione:

Scrivendo $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ abbiamo

$p(0) = d \quad p(1) = a+b+c+d \quad p(2) = 8a+4b+2c+d$ quindi

U è definito dalle eq.ni $a+b+c+d = d$ e $8a+4b+2c+d = a+b+c+d$

cioè dal sistema lineare $\begin{cases} a+b+c=0 \\ 7a+3b+c=0 \end{cases}$ nelle

incognite a, b, c, d. Lo spazio delle soluzioni è $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

quindi una base di U è data da $p_1(x) = 1$ e $p_2(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Inoltre, se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, abbiamo $p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$p'(0) = c \quad p'(1) = 3a + 2b + c \quad p'(2) = 12a + 4b + c$ quindi V è

definito dal sistema $\begin{cases} 3a+2b=0 \\ 9a+2b=0 \end{cases}$ con soluzioni $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Così una base di V è data da $p_3(x) = x$ e $p_4(x) = 1$.

In particolare si può osservare immediatamente che $1 \in U \cap V$

quindi $U \cap V \neq \{0\}$

Risposta: Base di U: $\boxed{(1, x^3 - 3x^2 + 2x)}$ Base di V: $\boxed{(x, 1)}$

U, V sono in somma diretta? $\boxed{\text{NO}}$

Esercizio 2. Sia $f\colon (\mathbb{F}_{11})^8 \to (\mathbb{F}_{11})^6$ un'applicazione lineare tale che la cardinalità di $\ker f$ sia 121. L'applicazione f è suriettiva? (Ovviamente la risposta va giustificata.)

Risoluzione: Sia p un primo qualsiasi.
Per ogni $\mathbb{F}_p$-spazio vettoriale V di dimensione finita si ha
$\dim_{\mathbb{F}_p} V = n \iff$ cardinalità di $V = p^n$ (perché $V \simeq (\mathbb{F}_p)^n$).
In questo caso la cardinalità di $\operatorname{Ker} f$ è $121 = 11^2$, quindi $\dim_{\mathbb{F}_{11}} \operatorname{Ker} f = 2$.
Pertanto $\dim \operatorname{Im} f = \dim (\mathbb{F}_{11})^8 - \dim \operatorname{Ker} f = 8 - 2 = 6$
e l'applicazione lineare è suriettiva.

Risposta: f è suriettiva? $\boxed{\text{Sì}}$

.

Esercizio 3. Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ una sua base. Siano inoltre

$$w_1 := v_1 - 2v_2 + 3v_3, \;\; w_2 := 2v_1 + v_2 + v_3, \;\; w_3 := 3v_1 + 2v_2 + v_3.$$

1. I vettori w_1, w_2, w_3 sono linearmente dipendenti o indipendenti?
2. Esiste un endomorfismo di V che manda i vettori v_1, v_2, v_3 rispettivamente nei vettori w_1, w_2, w_3? Se sì, scriverne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$.
3. Esiste un endomorfismo di V che manda i vettori w_1, w_2, w_3 rispettivamente nei vettori v_1, v_2, v_3? Se sì, scriverne la matrice associata rispetto alla base $\mathcal{B}$.

In coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ abbiamo

$$X_{\mathcal{B}}(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad X_{\mathcal{B}}(w_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_{\mathcal{B}}(w_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \ldots = 0$$ quindi i tre vettori sono lin dipendenti.

I vettori v_1, v_2, v_3 formano una base di V quindi esiste (ed è unico) l'endomorfismo che manda $v_1 \mapsto w_1$, $v_2 \mapsto w_2$, $v_3 \mapsto w_3$. La sua matrice, rispetto alla base $\mathcal{B}$, è proprio $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, le colonne sono le immagini dei vettori della base scritte in coordinate.

w_1, w_2, w_3 dipendenti o indipendenti? $\boxed{\text{dipendenti}}$

Esiste endomorfismo che manda v_1, v_2, v_3 in w_1, w_2, w_3? $\boxed{\text{sì}}$ Matrice: $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix}$

Esiste endomorfismo che manda w_1, w_2, w_3 in v_1, v_2, v_3? $\boxed{\text{NO}}$ Matrice:

Viceversa, i tre vettori w_1, w_2, w_3 sono lin. dipendenti quindi un qualsiasi endomorfismo li manda in altrettanti vettori lin. dipendenti. Quindi non esiste un endomorfismo che li manda nei vettori v_1, v_2, v_3.

Esercizio 4. Sia $\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di numeri interi definita ponendo $H_0 = -3$, $H_1 = 1$, e richiedendo che per ogni intero $n > 0$ valga la relazione

$$H_{n+1} = 3H_n + 10H_{n-1}. \tag{1}$$

(a) Date una matrice $A \in M_{2,2}(\mathbb{Z})$ tale che per ogni intero $n > 0$ valga l'uguaglianza

$$\begin{bmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{bmatrix}.$$

(b) Date una formula chiusa per H_n.

Deve valere $\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_n \\ H_{n-1} \end{pmatrix}$

cioè $\begin{cases} H_{n+1} = a_{11} H_n + a_{12} H_{n-1} \\ H_n = a_{21} H_n + a_{22} H_{n-1} \end{cases}$

e basta porre $a_{11} = 3$, $a_{12} = 10$, $a_{21} = 1$, $a_{22} = 0$.

A questo punto osserviamo che

$$\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} H_1 \\ H_0 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo quindi A^n. Diagonalizziamo.

$$\det(A - tI_2) = \det\begin{pmatrix} 3-t & 10 \\ 1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 3t - 10 = (5-t)(-2-t)$$

Autospazio relativo all'autovalore 5: $\operatorname{Ker}(A - 5I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Autospazio relativo all'autovalore -2: $\operatorname{Ker}(A + 2I_2) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$A = \boxed{\begin{matrix} 3 & 10 \\ 1 & 0 \end{matrix}}$ $\qquad H_n = \boxed{-\dfrac{5^{n+1}}{7} - \dfrac{(-2)^{n+4}}{7}}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 1/7 & -5/7 \end{pmatrix} \quad e$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{quindi}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 1/7 & -5/7 \end{pmatrix} \quad e \quad A^n = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/7 & 2/7 \\ 1/7 & -5/7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} H_{n+1} \\ H_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} H_1 \\ H_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5}{7} \\ \frac{16}{7} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{5^{n+1}}{7} \\ \frac{(-2)^{n+4}}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ -\frac{5^{n+1}}{7} - \frac{(-2)^{n+4}}{7} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. Si consideri il seguente sistema lineare di tre equazioni in tre incognite a coefficienti complessi e parametro $k \in \mathbb{C}$:

$$\begin{cases} x - ky = 1 - i \\ kx + (1-i)y + z = 1 \\ -iy + z = -i. \end{cases}$$

Discutere la compatibilità del sistema al variare del parametro (cioè per quali valori di $k \in \mathbb{C}$ il sistema ha soluzioni) e, in corrispondenza dei valori per cui il sistema risulta essere compatibile, determinarne la dimensione dello spazio delle soluzioni (cioè la dimensione del sottospazio vettoriale $V(k) \subset \mathbb{C}^3$ tale che lo spazio delle soluzioni sia dato da $(x_0, y_0, z_0) + V(k)$).

Risoluzione: In forma matriciale $\begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & 1-i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$

La matrice dei coefficienti è quadrata, calcoliamo il determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ k & 1-i & 1 \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix} = \dots = 1 + k^2 \qquad 1 + k^2 = 0 \iff k = \pm i$$

Quindi se $k \neq \pm i$ il sistema è compatibile e ammette un'unica soluzione. La dimensione dello spazio delle soluzioni è zero.

Se $k = i$ il rango della matrice dei coeff.ti è uguale a 2 così come il rango della matrice completa, quindi il sistema è compatibile e la dimensione dello spazio delle soluzioni è $3-2=1$

Se $k = -i$ il rango della matrice dei coeff.ti è uguale a 2 ma il rango della matrice completa è uguale a 3, quindi il sistema non è compatibile.

Il sistema è compatibile sse $\boxed{k \neq -i}$ Dimensione al variare di k: $\boxed{1 \text{ se } k = i,\ 0 \text{ se } k \neq \pm i}$

.