Algebra Lineare a.a. 2023/2024

Esame scritto - 14 Febbraio 2024

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	8	
2	8	
3	8	
4	8	
5	8	
Totale	40	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Siano $U, W \subset \mathbb{Q}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \langle (0,1,1,0),\ (1,1,1,1) \rangle, \qquad W := \{X \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 = x_2 + x_3 + x_4 = 0\}.$$

1. Determinate una base di $U \cap W$.
2. Date equazioni cartesiane di $U + W$, cioè scrivete $U + W$ come lo spazio delle soluzioni di un sistema di equazioni lineari omogenee.

Risoluzione:

1: Abbiamo $U = \{(t, s+t, s+t, t) \mid (s,t) \in \mathbb{Q}^2\}$. Imponendo che valgono le due equazioni che definiscono W, otteniamo che $2s+3t=0$, e quindi

$$U \cap W = \langle (2,-1,-1,2) \rangle.$$

2: Ogni funzione lineare che si annulla su $U+W$ si annulla su W (perchè $W \subset (U+W)$), e quindi è data da

$$a(x_1+x_2+x_3) + b(x_2+x_3+x_4) = 0$$

per opportuni $a, b \in \mathbb{Q}$. Imponendo che la funzione lineare svanisca anche su U, otteniamo che $a+b=0$, e quindi è un multiplo di $x_1 - x_4$.

Risposta: Base di $U \cap W$: $\{(2,-1,-1,2)\}$

Equazioni cartesiane di $U + W$: $x_1 - x_4 = 0$

Esercizio 2. Consideriamo il sistema lineare nelle incognite $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_3$ dato da

$$
\begin{aligned}
&x_1 - x_2 + m\,x_3 + 1 = 0\\
&x_1 + m\,x_2 - x_3 + 1 = 0\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 0,
\end{aligned}
$$

dove $m \in \mathbb{F}_3$.

1. Determinate per quali valori del parametro $m \in \mathbb{F}_3$ il sistema è compatibile, cioè ha soluzioni.
2. Per i valori di $m \in \mathbb{F}_3$ per i quali il sistema è compatibile, determinate l'insieme delle soluzioni.

Risoluzione:

Facciamo operazioni elementari sulle righe della matrice

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -1 \\ 1 & m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]
$$

e poi molt. per (-1) la 2^a

$$
-1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -1 \\ 1 & m & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -1 \\ 0 & m+1 & -m-1 & 0 \\ 0 & -1 & 1-m & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow
$$

$$
\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & -1 \\ 0 & m+1 & -m-1 & 0 \end{array}\right] \overset{-(m+1)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & -1 \\ 0 & 0 & -m^2-m & m+1 \end{array}\right]
$$

Sostituendo a m i tre valori $m=0,1,-1$ e risolvendo "dal basso" ottengo le risposte.

Risposta: Il sistema è compatibile se $\boxed{m=1 \quad o \quad m=-1}$

Le soluzioni, se il sistema è compatibile, sono

$m=1$: $(-1,-1,-1)$
$m=-1$: $(1,-t-1,t)$ $\quad t\in\mathbb{F}_3$

Esercizio 3. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ l'endomorfismo tale che

$$f(v_1) = -v_1 + v_3,\ f(v_2) = v_1 - v_3,\ f(v_3) = -v_1 + v_2 + 2v_3.$$

1. Scrivete la matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
2. Determinate autovalori (reali) e autospazi di f.
3. Determinate se f è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$.

1: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

2: Il polinomio caratteristico P_f è il polinomio caratteristico della matrice? Calcolando, si ottiene che

$$P_f = \lambda^2 \cdot (\lambda - 1)$$

Quindi gli autovalori di f sono $\lambda = 0$, con molteplicità algebrica 2 e $\lambda = 1$, con molteplicità algebrica 1. Calcolando si ottengono i relativi autospazi $V_0(f)$ e $V_1(f)$.

3: Siccome la molteplicità geometrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è più piccola della sua molteplicità algebrica, f non è diagonalizzabile.

$\mathrm{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}$ Autovalori di f: $\boxed{\lambda = 0 \quad \text{e} \quad \lambda = 1}$

Autospazi di f: $\boxed{V_0(f) = \langle v_1 + v_2 \rangle \qquad V_1(f) = \langle v_2 + v_3 \rangle}$

f è diagonalizzabile (su $\mathbb{R}$)? $\boxed{\text{NO}}$

Esercizio 4. Per $z \in \mathbb{C}$ sia $A_z \in M_{3,3}(\mathbb{C})$ la matrice data da

$$A_z := \begin{bmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & z \\ -1 & z & 1 \end{bmatrix}.$$

1. Determinate per quali valori di z la matrice A_z è invertibile.
2. Per tali valori determinate la matrice inversa A_z^{-1}.

Risoluzione:

1: Si ha $\operatorname{Det} A_z = -(z+i)^2$. Quindi $\operatorname{Det} A_z \neq 0$, cioè A_z è invertibile, se e solo se $z \neq -i$.

2: Si ha

$$A_z^c = \begin{bmatrix} -z^2-1 & -z-i & iz-1 \\ -z-i & 0 & -z-i \\ iz-1 & -z-i & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi l'inversa di A_z è

$$-(z+i)^{-2} \begin{bmatrix} -z^2-1 & -z-i & iz-1 \\ -z-i & 0 & -z-i \\ iz-1 & -z-i & 0 \end{bmatrix}.$$

Risposta: A_z è invertibile sse $\boxed{z \neq -i}$ In tal caso $A_z^{-1} = \boxed{-(z+i)^{-2} \cdot \begin{bmatrix} -z^2-1 & -z-i & iz-1 \\ -z-i & 0 & -z-i \\ iz-1 & -z-i & 0 \end{bmatrix}}$

Esercizio 5. Siano $U, W \subset \mathbb{Q}^4$ i sottospazi vettoriali definiti da

$$U := \langle (1,0,0,1),\ (0,1,1,0) \rangle, \qquad W := \{X \in \mathbb{Q}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\}.$$

Sia $H \subset \mathcal{L}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$, dove $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^4, \mathbb{Q}^4)$ è lo spazio degli endomorfismi di $\mathbb{Q}^4$, il sottospazio vettoriale definito da

$$H := \{f \colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4 \mid f(U) \subset U, \quad f(W) \subset W\}. \tag{1}$$

Esiste $v \in \mathbb{Q}^4$ che è autovettore per tutti gli endomorfismi di H?

Risoluzione:

Si ha

$$U \cap W = \langle (1,1,1,1) \rangle .$$

Siccome $\dim U \cap W = 1$, ogni vettore non nullo di $U \cap W$, per esempio $(1,1,1,1)$, è autovettore per tutti gli endomorfismi di H.

Risposta: Esiste $v \in \mathbb{Q}^4$ che è autovettore per tutti gli endomorfismi di H? | Sì |