Algebra Lineare a.a. 2023/2024

Esame scritto - 11 Settembre 2024

Nome e Cognome: ____________________

Numero di Matricola: ____________________

Esercizio	Punti totali	Punteggio
1	7	
2	7	
3	7	
4	7	
5	7	
Totale	35	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 *punti.*

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30: ______

Esercizio 1. Siano $V, W \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ (dove $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ è lo spazio vettoriale reale dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata x di grado minore o uguale a 3) dati da

$$V := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(-1) = p(1) = p'(0)\}, \quad W := \{p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(1) = p'(1) = p''(1)\}.$$

(a) Date una base di V.

(b) Date una base di W.

(c) I sottospazi V, W sono in somma diretta (cioè $V \cap W = \{0\}$ e $V + W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$)?

Risoluzione:

Un polinomio in $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ è della forma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, notiamo che a, b, c, d sono le coordinate di $p(x)$ rispetto alla base $\mathcal{E} = (x^3, x^2, x, 1)$. Preso $p(x)$ come sopra otteniamo

$p(-1) = -a + b - c + d$, $p(1) = a + b + c + d$, $p'(0) = c$

$p'(1) = 3a + 2b + c$, $p''(1) = 6a + 2b$.

Quindi V è definito dalle eq.ni $-a + b - c + d = a + b + c + d = c$

cioè $\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ a + b + d = 0 \end{cases}$, una base è ad esempio $(x^3 - x^2 - x, x^2 - 1)$.

Analogamente U è definito dalle eq.ni $a + b + c + d = 3a + 2b + c = 6a + 2b$

cioè $\begin{cases} 2a + b - d = 0 \\ 3a - c = 0 \end{cases}$, una base è ad esempio $(x^3 - 2x^2 + 3x, x^2 + 1)$.

I sottospazi U e V hanno entrambi dimensione 2, quindi essi sono in somma diretta sse l'unione delle due basi è una base di $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ sse la matrice formata dalle colonne delle coordinate dei quattro polinomi è non singolare:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 8 \neq 0$$

La matrice è non singolare.

Risposta: Base di V: $x^3 - x^2 - x$, $x^2 - 1$

Base di W: $x^3 - 2x^2 + 3x$, $x^2 + 1$

V, W sono in somma diretta? Sì

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $A \in M_{3,4}(\mathbb{K})$ la matrice data da

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Determinate per quali valori della caratteristica del campo $\mathbb{K}$ il rango di A è minore di 3.

(b) Determinate generatori del nucleo di A supponendo che $\operatorname{char} \mathbb{K} = 3$.

Risoluzione:

Il rango di A è minore di 3 sse il determinante di tutte le sottomatrici 3×3 è uguale a zero.

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 18 = 2 \cdot 3^2, \quad \det\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$\det\begin{pmatrix} 6 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 30 = 2\cdot 3 \cdot 5$. I primi che compaiono in tutte le fattorizzazioni sono 2 e 3, quindi il rango di A è minore di 3 sse $\operatorname{char}\mathbb{K} \in \{2,3\}$.

Se $\operatorname{char}\mathbb{K} = 3$ possiamo riscrivere A, modulo 3, come

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ker A : $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$ quindi una base di Ker A è ad esempio $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Risposta: $\operatorname{rk} A < 3$ per $\operatorname{char} \mathbb{K} \in$ $\boxed{\{2,3\}}$

Se $\operatorname{char} \mathbb{K} = 3$ $\ker A$ è generato da $\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}$

Esercizio 3. Sia $P \in M_{n,n}(\mathbb{K})$, e sia $\Phi_P \colon M_{n,n}(\mathbb{K}) \to M_{n,n}(\mathbb{K})$ l'applicazione lineare definita da

$$\begin{array}{ccc} M_{n,n}(\mathbb{K}) & \xrightarrow{\Phi_P} & M_{n,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & P \cdot A \end{array} \tag{1}$$

(a) Dimostrate che $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di Φ_P se e solo se è un autovalore di P.

(b) Sia $\overline{P} \in M_{2,2}(\mathbb{Q})$ la matrice data da

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Determinate gli autovalori di $\Phi_{\overline{P}}$.

(c) Determinate gli autospazi di $\Phi_{\overline{P}}$.

a) Se $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ è un autovettore di P di autovalore λ, allora una matrice $A \neq 0$ tale che tutte le sue colonne siano proporzionali a v è un autovettore di Φ_P di autovalore λ. Viceversa, se $A \in M_{n,n}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$ è un autovettore di Φ_P di autovalore λ, allora ogni sua colonna non nulla è autovettore di P di autovalore λ.

b) Abbiamo appena detto che gli autovalori di $\Phi_{\overline{P}}$ sono gli autovalori di $\overline{P}$, calcoliamo questi ultimi.

$$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -6 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda \quad \Rightarrow \quad \text{spettro} = \{0, 1\}$$

c) Determiniamo gli autospazi di $\overline{P}$: $E_{\overline{P}}(0) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$

$E_{\overline{P}}(1) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Per quanto visto al punto (a) abbiamo

$$E_{\Phi_{\overline{P}}}(0) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \quad E_{\Phi_{\overline{P}}}(1) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Risposta: Autovalori di $\Phi_{\overline{P}}$: $\boxed{0, 1}$ Autospazi di $\Phi_{\overline{P}}$: $\boxed{E(0) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\} \quad E(1) = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}}$

Esercizio 4. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3, e sia $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una sua base. Sia $f: V \to V$ l'endomorfismo tale che

$$f(v_1) = v_1 + 2v_2, \;\; f(v_2) = -v_1 - v_3, \;\; f(v_3) = v_1 - v_2 + 2v_3.$$

(a) Scrivete la matrice $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f)$ associata a f rispetto alla base $\mathcal{B}$.

(b) Determinate gli autovalori (reali) di f.

(c) Determinate se f è diagonalizzabile.

a) $M^{B}_{B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$ spettro $= \{1\}$

c) f ha 1 come unico autovalore, di molteplicità 3, quindi non è diagonalizzabile perché è diverso dall'identità.

Risposta: $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(f) =$ $\boxed{\begin{matrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{matrix}}$

Autovalori di $f =$ $\boxed{1}$ $\quad$ f è diagonalizzabile? $\boxed{\text{No}}$

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato sul campo $\mathbb{K}$, e sia $f\colon V \to V$ un endomorfismo di V tale che
$$f \circ f = \mathrm{Id}_V\,.$$

(a) Dimostrate che se $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$ allora f è diagonalizzabile.

(b) Date un esempio di f come sopra non diagonalizzabile (quindi necessariamente $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$).

Risoluzione:

a) Mostriamo che ogni vettore $v \in V$ si scrive come somma di autovettori di f, se $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$,

$$v = \frac{v + f(v)}{2} + \frac{v - f(v)}{2}\,.$$

I due addendi sono autovettori di autovalori, rispettivamente 1 e -1.

b) Basta prendere $f = L_A : (\mathbb{F}_2)^2 \longrightarrow (\mathbb{F}_2)^2$ con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$