

Geometria II
Prof. K. O'Grady
Prova di esonero - 15 Aprile 2025

Nome e Cognome: _____

Numero di Matricola: _____

Esercizio	Punteggio massimo	Punteggio
1	9	
2	9	
3	9	
4	9	
Totale	36	

Occorre motivare le risposte. Una soluzione corretta priva di motivazione riceverà 0 punti.

Verrà corretto solo quello che sarà scritto su queste pagine.

Voto/30:

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}_{\text{Sf}}$ la retta di Sorgenfrey, cioè $\mathbb{R}$ con topologia che ha base gli intervalli $[a, b)$ (chiusi a sinistra, aperti a destra).

(A) Dimostrate che un intervallo $[a, b]$ con $a < b$ non è compatto in $\mathbb{R}_{\text{Sf}}$.

(B) Descrivete esplicitamente tutti i sottospazi topologici compatti $X \subset \mathbb{R}_{\text{Sf}}$.

Risoluzione:

(A): Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione con $x_n \in [a, b)$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, $x_0 = a$,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots$$

e $x_n \rightarrow b$ per $n \rightarrow \infty$. (Tali successioni esistono.)

Allora

$$[a, b] = \{b\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}) \quad (*)$$

Siccome $\{b\} = [a, b] \cap [b, b+1)$ e $[x_n, x_{n+1}) = [a, b] \cap [x_n, x_{n+1})$,

ciascun sottoinsieme di $[a, b]$ che appare a destra dell'uguaglianza in (*) è un aperto di $[a, b]$.

In altre parole (*) è un ricoprimento aperto di $[a, b]$.

Siccome l'insieme degli aperti del ricoprimento è infinito e gli aperti sono a due a due disgiunti non esiste un sottoricoprimento finito.

(B): X è compatto se e solo se

è limitato, chiuso nella topologia euclidea, e non ha successioni strettamente crescenti.

(B): Sia $X \subset \mathbb{R}_{sf}$ compatto. Dimostriamo che

(B1) X è limitato e chiuso nella topologia euclidea.

(B2) non esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di X tale che

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots \quad (*)$$

(B1): L'applicazione $\mathbb{R}_{sf} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{R}}} \mathbb{R}_{Euc}$ è continua perché la topologia di Sorgenfrey è più fine di quella euclidea. Quindi $X = \text{Id}_{\mathbb{R}}(X)$ è compatto per la topologia euclidea, cioè X è limitato e chiuso nella topologia euclidea.

(B2): Supponiamo che esista una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di punti di X tale che valga (*). Sia $\bar{x} := \sup \{x_n\}$.

Abbiamo il ricoprimento aperto

$$\mathbb{R}_{sf} = (-\infty, x_0) \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}) \cup [\bar{x}, +\infty)$$

e quindi anche il ricoprimento aperto

$$X = ((-\infty, x_0) \cap X) \cup \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} [x_n, x_{n+1}) \cap X \right) \cup ([\bar{x}, +\infty) \cap X).$$

Siccome gli aperti sono a due a due disgiunti e $x_n \in X$, ogni sottocopertura contiene gli aperti $(x_n, x_{n+1}) \cap X$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, e perciò non è finito. Contraddizione!

Ora dimostriamo che se valgono (B1) e (B2) allora $X \subset \mathbb{R}_{sf}$ è compatto. Siccome X è limitato possiamo assumere che $X \subset [a, b]$. Sia $\mathcal{A} := \{A_j\}_{j \in J}$ un ricoprimento aperto di X . Sia $S \subset [a, b]$ il sottoinsieme i cui elementi sono $c \in [a, b]$ tale che esiste $I(c) \subset J$ finito con la proprietà che

$$[a, c] \cap X \subset \bigcup_{j \in I(c)} A_j \quad (*)$$

S non è vuoto perché $a \in S$. Inoltre se $c_0 \in S$, allora $[a, c_0] \subset S$. Segue che

I. $S' = [a, b]$, o

II. $S = [a, c_0]$ $a \leq c_0 < b$, o

III. $S = [a, c_0)$ $a \leq c \leq b$.

Dimostriamo che vale I.

Supponiamo che valga II. Per (*) $c_0 \in A_{j_0}$

per un $j_0 \in I(c_0)$. Quindi $\exists \varepsilon > 0$ t.c. $[c_0, c_0 + \varepsilon) \cap X \subset A_{j_0}$

e perciò $[a, c_0 + \varepsilon) \cap X \subset \bigcup_{j \in I(c_0)} A_j$. Quindi

$[a, c_0 + \varepsilon) \subset S = [a, c_0]$, contraddizione!

Ora supponiamo che valga III. Allora

$$[c_0 - \varepsilon, c_0) \cap X \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0. \quad (+)$$

Infatti se esiste $\varepsilon > 0$ t.c. $[c_0 - \varepsilon, c_0) \cap X = \emptyset$,

allora $c_0 \in S$ perché

$$[a, c_0 - \varepsilon] \cap X \subset \bigcup_{j \in I(c_0 - \varepsilon)} A_j$$

e perciò

$$[a, c_0] \cap X \subset \bigcup_{j \in I(c_0 - \varepsilon)} A_j \quad \text{se } c_0 \notin X, \text{ e}$$

$$[a, c_0] \cap X \subset \bigcup_{j \in I(c_0 - \varepsilon)} A_j \cup A_k \quad \text{dove } c_0 \in A_k \text{ se } c_0 \in X.$$

Ma da (+) segue che esiste una successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

di punti di X per cui vale (*), contraddizione!

Quindi vale I, cioè $\mathcal{A}$ ha un sottoriscoprimento finito.

Esercizio 2. Siano X, Y spazi topologici e $f: X \rightarrow Y$ un'applicazione continua. Il grafico di f è il sottospazio topologico

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\} \subseteq X \times Y.$$

- (a) Dimostrate che X è omeomorfo a Γ_f .
- (b) Dimostrate che se Y è di Hausdorff, allora Γ_f è chiuso in $X \times Y$.
- (c) Date un esempio in cui Γ_f non è chiuso in $X \times Y$.

Risoluzione:

(a): La proiezione
$$X \times Y \xrightarrow{p_X} X$$
 è continua, quindi la sua restrizione a Γ_f

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_f & \xrightarrow{\varphi} & X \\ (x, f(x)) & \mapsto & x \end{array}$$

è continua. L'applicazione φ è biunivoca. Per finire basta dimostrare che φ^{-1} è continua, cioè che

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\varphi^{-1}} & \Gamma_f \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

è continua. Siccome $\text{Id}_X: X \rightarrow X$ e $f: X \rightarrow Y$ sono continue, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & X \times Y \\ x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

è continua. Quindi φ^{-1} è continua.

(c): Esempio di Γ_f che non è chiuso in $X \times Y$:

$$X = \mathbb{R}_{\text{cofin}} \quad f = \text{Id}_X$$

(b): L'application

$$\begin{aligned} X \times Y &\xrightarrow{\alpha} Y \times Y \\ (x, y) &\mapsto (f(x), y) \end{aligned}$$

è continua perché le composizioni di α con le due proiezioni $Y \times Y \rightarrow Y$ sono applicazioni continue.

Siccome Y è di Hausdorff, la diagonale

$$\Delta_Y := \{(y, y) \in Y \times Y \mid y \in Y\}$$

è chiusa in $Y \times Y$, e quindi

$$\alpha^{-1}(\Delta_Y) = \Gamma_f$$

è chiuso in $X \times Y$.

(c) Se X non è di Hausdorff (per esempio $\mathbb{R}$ con la topologia di cofinità)

allora

$$\Gamma_{\text{Id}_X} = \Delta_X \subset X \times X$$

non è chiuso in $X \times X$.

Esercizio 3. Sia $\mathbb{R}_+ := (0, +\infty) \subset \mathbb{R}$. Per $n \in \mathbb{Z}$ sia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & 2^n x \end{array} \quad (1)$$

Sia $G < \text{Aut}(\mathbb{R}_+)$ il gruppo di omeomorfismi $G := \{f_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

(a) Dimostrate che $\mathbb{R}_+/G$ è connesso e compatto.

(b) Dimostrate che $\mathbb{R}_+/G$ è omeomorfo a S^1 .

Risoluzione:

Siccome S^1 è connesso e compatto, è sufficiente dimostrare che vale (b). Per $n \in \mathbb{Z}$ sia $g_n \in \text{Aut}(\mathbb{R})$ dato da

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & t + n \cdot \log 2 \end{array}$$

Sia $H < \text{Aut}(\mathbb{R})$ dato da $H := \{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Abbiamo l'omeomorfismo di spazi topologici

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\log} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \log x \end{array}$$

e l'isomorfismo di gruppi

$$\begin{array}{ccc} & \Phi & \\ G & \xrightarrow{\sim} & H \\ f_n & \mapsto & g_n \end{array}$$

Per $n \in \mathbb{Z}$ si ha che il diagramma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{f_n} & \mathbb{R}_+ \\ \log \downarrow & & \downarrow \log \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{g_n} & \mathbb{R} \end{array}$$

è commutativo. Segue che abbiamo un'applicazione continua

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+/G &\xrightarrow{\Lambda} \mathbb{R}/H \\ [x] &\longmapsto [\log x] \end{aligned}$$

L'applicazione Λ è biiunivoca, e l'inversa

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/H &\xrightarrow{\Lambda^{-1}} \mathbb{R}_+/G \\ [t] &\longmapsto [\exp t] \end{aligned}$$

è continua. Quindi Λ è un omeomorfismo. Abbiamo visto in classe che

$$\mathbb{R}/H \cong S^1.$$

Esercizio 4. Delle due affermazioni riportate sotto determinate se è vera, e in questo caso datene una dimostrazione, o falsa e in questo caso date un controesempio.

(A) Uno spazio topologico separabile ha una base numerabile.

(B) Uno spazio topologico a base numerabile è primo-numerabile.

Risoluzione:

(A): $\mathbb{R}_{sf}$ è separabile (Q è demo) ma non ha una base numerabile.

(B): Sia $\mathcal{B} = \{A_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una base numerabile dello spazio topologico X .

Sia $x_0 \in X$. Sia

$$\mathcal{I} := \{A_n \mid x_0 \in A_n\}.$$

$\mathcal{I}$ è una collezione numerabile di intorni di x_0 .

Basta dimostrare che $\mathcal{I}$ è un sistema fondamentale di intorni di x_0 . Sia U un intorno di x_0 , cioè

$$x_0 \in \text{int} U.$$

Siccome $\mathcal{B}$ è una base di X , $\text{int} U$ è unione di insiemi in $\mathcal{B}$, e perciò esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$x_0 \in A_{n_0} \subset \text{int} U.$$

Questo dimostra che $\mathcal{I}$ è un sistema fondamentale di intorni di x_0 .

(A): Vera o falsa?

FALSA

(B): Vera o falsa?

VERA