Geometria Algebrica, a. a. 2023-24

Prof. K. O'Grady

Diario delle lezioni

3 maggio 2024

Settimana 1.

(06/03/2024) Trailer del corso: integrali ellittici ed iperellittici, genere di una curva, funzione zeta di Weil. Topologia di Zariski.

(08/03/2024) Decomposizione in irrriducibili di un sottoinsieme $X \subset \mathbb{P}^n$ con la topologia di Zariski. Una estensione di campi $K \supset F$ che è un'algebra finitamente generata su F è una estensione algebrica di F.

Settimana 2.

(13/03/2024) Il Nullstellensatz di Hilbert. Applicazioni regolari tra varietà quasi proiettive. Varietà affini e proiettive. L'applicazione e le varietà di Veronese.

(15/03/2024) Correzione esercizi. Aperti affini principali. Gli aperti affini di una varietà quasi proiettiva formano una base della Topologia di Zariski. Ogni funzione regolare su un chiuso in uno spazio affine è la restrizione di una funzione polinomiale.

Settimana 3.

(20/03/2024) Varietà proiettive definite su un sottocampo $F \subset \mathbb{K}$ e applicazioni regolari definite su F. Punti razionali su F. La funzione zeta di Weil. Data una estensione di campi $F \subset K$ tale che $F = K^{\mathrm{Aut}(K/F)}$, e uno spazio vettoriale V su F, se un K sottospazio di $K \otimes_F V$ è invariante per l'azione di $\mathrm{Aut}(K/F)$ allora è $K \otimes_F V_0$ per un opportuno F sottospazio $V_0 \subset V$.

(22/03/2024) Correzione esercizi. Sia $F \subset \mathbb{K}$ un sottocampo tale che $F = K^{\mathrm{Aut}(\mathbb{K}/F)}$; se $I \subset \mathbb{K}[Z_0, \ldots, Z_n]$ è generato da polinomi a coefficienti in F, allora $V(I)$ è definito su F. Atlanti algebrici e prevarietà algebriche.

Settimana 4.

(27/03/2024) Prodotti in una categoria. Il prodotto esiste nella categoria delle prevarietà algebriche. Prevarietà algebriche separate, varietà algebriche.

Settimana 5.

(03/04/2024) Le varietà quasi proiettive sono varietà algebriche. Il prodotto di varietà quasi proiettive è quasi proiettivo. Varietà complete. Le varietà proiettive sono complete.

(05/04/2024) Se $f\colon X \to Y$ con X varietà completa e Y separata, allora f è chiusa. Le funzioni regolari su varietà complete sono localmente costanti. Fibrati vettoriali algebrici.

Settimana 6.

(10/04/2024) Fibrati vettoriali (algebrici) di rango r e 1-cocicli a valori in $\mathrm{GL}_r(\mathbb{K})$. Fibrati vettoriali (algebrici) costruiti a partire da altri fibrati vettoriali (algebrici): fibrato duale, fibrato determinante, potenze tensoriali.

(12/04/2024) Correzione esercizi. Applicazioni razionali. Composizione di applicazioni razionali dominanti, applicazioni birazionali.

Settimana 7.

(17/04/2024) Due varietà (algebriche irriducibili) sono birazionali se e solo se contengono aperti densi isomorfi. Il campo delle funzioni razionali su una varietà algebrica irriducibile. Equivalenza (controvariante) tra la categoria delle varietà algebrica irriducibili con morfismi le applicazioni razionali dominanti e la categoria delle estensioni finitamente generate del campo base.

(19/04/2024) Correzione esercizi. Dimensione di varietà algebriche. Un chiuso proprio di una varietà algebrica irriducibile ha dimensione strettamente inferiore della dimensione dell'ambiente. Un chiuso in $\mathbb{A}^{n+1}$ (o $\mathbb{P}^{n+1}$) ha dimensione pura n se e solo se è un'ipersuperficie.

Settimana 8.

(24/04/2024) Relazione tra dimensione e intersezione con sottospazi lineari per un chiuso in $\mathbb{P}^n$.

(26/04/2024) Correzione esercizi. Se $X \subset \mathbb{P}^n$ è un chiuso irriducibile con $\dim X > 0$ e $H \subset \mathbb{P}^n$ è un iperpiano non contenente X, allora $X \cap H$ è non vuoto di dimensione pura uguale a $\dim X - 1$. $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ sono chiusi e $\dim X + \dim Y \geq n$ allora $X \cap Y \neq \emptyset$ e $\dim X \cap Y \geq \dim X + \dim Y - n$.

Settimana 9.

(03/05/2024) Applicazioni regolari proiettive: semicontinuità superiore della dimensione della controimmagine, la dimensione della controimmagine generale è pura uguale alla differenza tra le dimensioni di dominio e codominio, se dominio e codominio sono irriducibili e l'applicazione è dominante. Se $f\colon X \to Y$ è proiettiva, Y è irriducibile e le fibre $f^{-1}(y)$ sono tutte irriducibili della stessa dimensione, allora X è irriducibile. L'immagine di un'applicazione regolare contiene un aperto denso della sua chiusura. Applicazioni al problema di capire la varietà che parametrizza i sottospazi lineari di data dimensione che appartengono a una ipersuperficie generale di grado fissato.